Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Lothar Sebastian Krapp
WS 2015 / 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Algebra (B3)

Weihnachtsblatt
Zusatzaufgaben für die Weihnachtsferien

Zusatzaufgabe 1
(3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für jeden Ring $R \neq \{0\}$ ein Ideal $I \lhd R$, $I \neq R$, mit der folgenden Eigenschaft existiert: Für alle $a \in R \setminus I$ existiert ein $b \in R$ mit $ab - 1 \in I$.

Zusatzaufgabe 2
(4 Punkte)
Seien K ein Körper, $K[X,Y]$ der Polynomring über K in zwei Variablen, $I = (X^2 - Y^3)$ das von $X^2 - Y^3$ erzeugte Hauptideal und $R = K[X,Y]/I$.

a) Sei $\psi : K[X,Y] \to K[T]$ der Homomorphismus gegeben durch $\psi(X) = T^3$, $\psi(Y) = T^2$ und $\psi|_K = \mathrm{id}_K$, wobei $K[T]$ den Polynomring über K in einer Variablen bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\psi) = I$.

   Hinweis: Jedes Polynom $p(X,Y) \in K[X,Y]$ lässt sich so als $p(X,Y) = X^2 q_1(X,Y) + Y^3 q_2(X,Y) + r(X,Y)$ ausdrücken, dass weder X^2 noch Y^3 in den Monomen von $r(X,Y)$ auftreten.

b) Zeigen Sie: Genau dann ist ein Polynom $f(T)$ in $\mathrm{Im}(\psi)$, wenn $f(T)$ keinen linearen Term besitzt, also der Koeffizient von T in $f(T)$ gleich 0 ist.

c) Folgern Sie, dass R nicht faktoriell ist.

Zusatzaufgabe 3
(4 Punkte)
Da immer mehr Kinder vom Weihnachtsmann teure Spielekonsolen und Smartphones geschenkt bekommen, wurde in der Spielzeugabpackfabrik am Nordpol das Budget für Spielzeugautos gekürzt. Daher musste der Warenwichtel sich etwas einfallen lassen, um dennoch genug Spielzeugautos für das Fest zu haben. Anstelle teurer handverarbeiteter Autos bestellte er also dieses Jahr die Restbestände einer chinesischen Spielzeugfabrik. Zwar reichte auch hier das Geld nicht für die 1000 Autos, die sie in den vorigen Jahren jeweils hatten, aber versprach die Fabrik zumindest, dass ihre Restbestände fast an diese Anzahl heranreichen würden.
Als der Warenwichtel das Paket aus China öffnete, stellte er mit Entsetzen fest, dass alle Spielzeugautos einfach nur lose und bunt gemischt darin enthalten waren. Lediglich ein Zettel lag bei, auf dem stand: „Liebe Weihnachtswichtel am Nordpol, leider ist es uns nicht gelungen, diesen Satz Spielzeugautos in gleichgroßen Boxen abzupacken. Als wir die Autos komplett auf Boxen aufteilten, in denen Platz für je 11 Stück war, blieben am Ende 5 übrig; als wir mit ihnen Zehnerboxen füllten, waren es noch 3 Autos zu viel; als wir es mit den Neunerboxen probierten, blieb noch immer eines übrig. Daher haben wir uns entschieden, sie einfach in einem großen Paket zu versenden." Verzweifelt denkt sich der Warenwichtel: „Das klingt überhaupt nicht gut! Schließlich will der Weihnachtsmann präzise Angaben zu den Anzahlen der jeweiligen Spielzeuge haben. Letztes Jahr gab es doch schon Ärger, weil eine meiner Zählungen falsch war und deshalb ein kleines Mädchen kein Samsung Galaxy S6 bekam. Wenn ich die Autos per Hand abzählen muss, dann verzähle ich mich mit Sicherheit. Und nur mit diesen Angaben kann ich doch nicht ermitteln, wie viele Spielzeugautos geliefert wurden. Dieser chinesische Restesatz von Spielzeugautos ist nutzlos!"
Ist er das wirklich? Rette den Kopf des Warenwichtels, indem du anhand aller Informationen ermittelst, wie viele Autos geliefert wurden. Erkläre auch, warum deine Lösung die einzig mögliche ist.

Zusatzaufgabe 4
(3 Punkte)
Sei $A = \mathbb{Q}[R]$ der Polynomring über $\mathbb{Q}$ in der Variablen R. Sei $A[X, Y, Z]$ der Polynomring über A in den Variablen X, Y, Z. Für ein Polynom $f \in A[X, Y, Z]$ bezeichne $\deg f$ den Totalgrad von f in den Variablen X, Y, Z. Seien $a, e, m, r \in \mathbb{N}$. Faktorisieren Sie das folgende Polynom in $A[X, Y, Z]$ in seine Primfaktoren:

$$-m^a rYZ^2 + rXY - m^{a+e}R^2Z^2 + m^eR^2X.$$

Schreiben Sie das Produkt der Primfaktoren sowie die Summe der Monome in jedem Primfaktor in aufsteigender Reihenfolge der Totalgrade.

Abgabe: Montag, 11. Januar 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.