Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 1

Aufgabe 1
Erinnerung: $K[[X]]$ bezeichnet die Algebra der Potenzereihen über K, deren Multiplikation durch $(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i}$ definiert ist.

Sei K ein Körper.

a) Sei $x = (0, 1, 0, \dots) \in K[[X]]$. Zeigen Sie, dass

$$x^i = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-te Stelle}}, 0 \dots)$$

b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation in $K[[X]]$ distributiv ist und dass für jedes $c \in K$ und alle $f, g \in K[[X]]$ gilt: $c(fg) = (cf)g$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ mit $f + g \neq 0$ gilt

$$deg(f + g) \leq max\{deg(f), deg(g)\}$$

d) Zeigen Sie, dass für alle $f, g \in K[X]$ mit $deg(f) \neq deg(g)$,

$$deg(f + g) = max\{deg(f), deg(g)\}$$

Aufgabe 2
Sei K ein Körper.
Erinnerung: Zwei K-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind isomorph als K-Algebren, wenn es einen K-Vektorraumisomorphismus $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ gibt mit $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $K[[X]]$ ein Integritätsbereich ist.

b) Es seien S, T isomorphe K-Algebren. Zeigen Sie, dass S genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn T ein Integritätsbereich ist.

c) Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ mit Multiplikation $(fg)_n = f_n g_n$ eine K-Algebra mit Einheit ist.

d) Sind $K[[X]]$ und $\mathcal{A}$ isomorph als K-Algebren?

Aufgabe 3

Sei K ein Körper.

Erinnerung: Seien V ein K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $f \in K[X]$. Für ein Polynom $f := \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ mit $c_i \in K$ definieren wir $f(T) := \sum_{i=0}^{n} c_i T^i$ wobei $T^0 := Id_V$ und $T^i := T \circ T^{i-1}$ (T komponiert mit T^{i-1}).

a) Sei $T : K^3 \to K^3$ der lineare Operator definiert durch:

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$$

Sei $f \in K[X]$ das Polynom $f(x) = -x^3 + 2$.

Berechnen Sie $f(T)(x_1, x_2, x_3)$ für alle $x_1, x_2, x_3 \in K$.

Sei K ein Körper und $h \in K[X]$ vom Grad mindestens 1 und definiere die Abblidung:

$\phi_h : K[X] \to K[X]$ durch $f \mapsto f(h)$.

b) Zeigen Sie, dass ϕ_h linear und injektiv ist.

c) Sei $f \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $deg(\phi_h(f)) = deg(f)deg(h)$

d) Zeigen Sie, dass ϕ_h genau dann ein Isomorphismus ist, wenn $deg(h) = 1$

Zusatzaufgabe für Interessierte

Erinnerung: Sei $\mathcal{A}$ eine K-Algebra und S eine Teilmenge von $\mathcal{A}$. Die von S erzeugte K-Algebra ist der Schnitt aller K-Algebren, die S enthalten (es ist also die kleinste K-Algebra, die S enthält).

Sei $\mathcal{A}$ die von $\{X^2, X^3\}$ erzeugte $\mathbb{R}$-Algebra in $\mathbb{R}[X]$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[X]$ als $\mathbb{R}$-Algebren nicht isomorph sind, obwohl sie als $\mathbb{R}$-Vektorräume isomorph sind. Wir nehmen an, es existiere einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren: $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} = span(\{X^k \mid k \neq 1\})$ und geben Sie dann eine kurze Erklärung, warum $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[X]$ als $\mathbb{R}$-**Vektorräume** isomorph sind.

Hinweis: jede Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Linearkombination von 2 und 3 schreiben.

b) Sei $h := \Phi(X)$. Zeigen Sie $\Phi = \phi_h$, wobei ϕ_h wie in Aufgabe 3 definiert ist.

c) Folgern Sie aus Aufgabe 3.c) , dass $deg(h) = 1$ gelten muss. Beachten Sie, dass wir 3.d) nicht anwenden können.

d) Folgern Sie aus c), dass $\mathcal{A}$ und $\mathbb{R}[X]$ als $\mathbb{R}$-Algebren nicht isomorph sind.

Abgabe: Donnerstag, 21. April 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.