Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 3

Aufgabe 1

(a) Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}[X]$ sind Ideale? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (a) $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(0) = 0\}$
   (b) $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid D(f)(2) = 0\}$.
   (c) $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid D(f)(2) = f(2) = 0\}$.

(b) Sei K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$(x^2 + 8x + 16)K[X] + (x + 1)K[X] = K[X].$$

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass $|S_n| = n!$.

   Hinweis: Sie können eine Induktion auf n durchführen und ein geeignetes $\tau \in S_n$ finden, so dass $\tau\sigma$ ein Element von S_{n-1} ist.

b) Schreiben Sie

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in S_n$$

   als Produkt von disjunkten Zyklen und als Produkt von Transpositionen. Berechnen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$.

c) Sei $\tau \in S_n$ ein k-Zykel, $k \leq n$. Zeigen Sie, dass $sign(\tau) = (-1)^{k+1}$.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Seien $\sigma, \tau \in S_n$ zwei disjunkte Zykel. Zeigen Sie, dass $\sigma\tau$ kein Zykel ist.

b) Zeigen Sie, dass $\sigma, \tau \in S_n$ kommutieren, wenn σ und τ disjunkt sind.

c) Seien $\tau, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in S_n$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ paarweise disjunkt.
   Zeigen Sie, dass $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ und τ genau dann disjunkt sind, wenn für $0 < i \leq m$ α_i und τ disjunkt sind.

Aufgabe 4 Diese Aufgabe ist eine Folge zur Aufgabe 1 aus Blatt 2, also haben wir $n \in \mathbb{N}$ und

$$P_i := \prod_{j \neq i} \frac{X - t_j}{t_i - t_j}$$

für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix von der Basis $(1, X, X^2, ..., X^n)$ nach der Basis $(P_0, ..., P_n)$

$$\mathcal{V}_n := \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

ist. Diese Matrix heißt Vandermonde-Matrix.

(b) Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

und $w_0, w_1, w_2 \in \mathbb{Q}$.

Finden Sie $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$, so dass für das Polynom $p := a_2X^2 + a_1X + a_0$ gilt $p(1) = w_0$, $p(-1) = w_1$ und $p(2) = w_2$, in dem Sie das Inverse von A berechnen.

(c) Seien $f_0, \dots, f_n \in K_n[X]$ mit $deg(f_i) = i$ für jedes $i \in \{0, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(f_0, \dots, f_n)$ eine Basis von $K_n[X]$ ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte

a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\tau^{n!} = id$ für alle $\tau \in S_n$.
Hinweis: Untersuchen Sie zunächst, was die l-te Potenz eines m-Zykels ist.

Abgabe: Donnerstag, 5. Mai 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.