Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 5

Aufgabe 1
(5 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und seien $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2 \in K$. Ohne Berechnung, erklären Sie warum

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(b) Sei $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ und alle Einträge seien entweder 1 oder -1. Beweisen Sie, dass $\det A \in \mathbb{Z}$ und teilbar durch 2^{n-1} (in $\mathbb{Z}$) ist.

Aufgabe 2
(5 Punkte)

(a) Seien $a, b, c, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^4$. Seien $A := (a, r_1, b, r_2)$ (A ist also die 4×4-Matrix, die a, r_1, b, r_2 als Spalten hat), $B := (c, r_1, a, r_2)$ und $C := (b, r_1, c, r_2)$ mit $\det A = 3$ und $\det B = 2$ und $\det C = 1$.

Finden Sie $\det(A + B)$.

(b) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 9 \\ 10 & 4 & 8 & 5 \\ 2 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{F}_{11}$.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Sei $n \geq 2$. Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ und sei

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

die Vandermonde-Determinante.
Zeigen Sie mit Induktion über n, dass $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)

(a) Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Matrix $A[i|j]$ ist die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die man durch Entfernung der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A bekommt. In der Vorlesung, haben wir definiert:

$$D_{ij}(A) := \det(A[i|j]).$$

Für feste $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} K^{n \times n} & \longrightarrow & K \\ A & \mapsto & A_{ij} D_{ij}(A) \end{array}$$

eine bezüglich der Spalten von A n-lineare Funktion ist.

(b) Wir sagen, dass eine Matrix $A = (A_{ij}) \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, wenn für alle i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$ gilt $A_{ij} = 0$.

Zeigen Sie, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Einträge auf der Diagonalen ist (also $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$).

Zusatzaufgabe für Interessierte
(1 extra Punkt)
Seien $a, b \in K$. Berechnen Sie die Determinante der folgenden $n \times n$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & b & b \\ b & a & \ldots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \ldots & a & b \\ b & b & \ldots & b & a \end{pmatrix}$$

.

Abgabe: Donnerstag, 19. Mai 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.