

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 7

K ist überall ein beliebiger Körper.

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Seien $A, B \in K^{n \times n}$.

(a) Zeigen Sie: falls $(I_n - AB)$ invertierbar ist, gilt

$$(I_n + B(I_n - AB)^{-1}A)(I_n - BA) = I_n.$$

(b) Zeigen Sie, dass AB und BA die gleichen Eigenwerte haben.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Definition: Sei $A \in K^{n \times n}$. "A diagonalisieren" bedeutet, n Elemente $d_1, \dots, d_n \in K$ und eine Matrix

$$P \in K^{n \times n} \text{ zu finden, so dass } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Seien } A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \text{ beide in } \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Diagonalisieren Sie A und B .

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Diese Aufgabe ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 1.b) aus Blatt 5.

(a) Sei $A[X] \in K[X]^{n \times n}$, $r := \text{rang}(A(0))$.

Zeigen Sie, dass $X^{n-r} \mid \det(A[X])$.

Hinweis: Betrachten Sie die reduzierte Zeilenstufenform von $A(0)$.

(b) Wie folgert man die Behauptung 1.b) in Blatt 5 daraus?

Aufgabe 4

(5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $g \in K[X]$.

- (a) Sei d ein Eigenwert von T und x ein Eigenvektor zu d . Zeigen Sie, dass $g(d)$ ein Eigenwert von $g(T)$ ist und finden Sie einen Eigenvektor zu $g(d)$.
- (b) Zeigen Sie, dass $g(T)$ diagonalisierbar ist, falls T diagonalisierbar ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte

(2 extra Punkte)

Eine reelle stochastische Matrix ist eine Matrix $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass:

- Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $a_{ij} \geq 0$.
- Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

Stochastische Matrizen erscheinen in Wahrscheinlichkeitstheorie, zum Beispiel in Zusammenhang mit Markovketten.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stochastische Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A .

- (a) Zeigen Sie, dass $|\lambda| \leq 1$.

Wir nehmen jetzt an, dass $|\lambda| = 1$. Wir nehmen einen Eigenvektor $X = (x_1, \dots, x_n)$ zum Eigenwert λ und wählen eine Koordinate x_i von X von maximalem Betrag, d.h. $|x_i| = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

- (b) Zeigen Sie: $|\lambda - a_{ii}| = \sum_{j \neq i} a_{ij} \left| \frac{x_j}{x_i} \right| = \sum_{j \neq i} a_{ij}$.
- (c) Folgern Sie aus b), dass $\lambda = 1$, falls $a_{ii} \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.
- (d) Folgern Sie aus b), dass λx_i auch eine Koordinate von X von maximalem Betrag ist.
- (e) Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass λ eine m -te Einheitswurzel ist, d.h. $\lambda^m = 1$.

Abgabe: Donnerstag, 2. Juni 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.