Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 9

Alle Referenzen zur Vorlesung verweisen auf das online Skript.

Aufgabe 1
(5 Punkte)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T \in L(V, V)$ und $g \in K[X]$.

(a) Sei $W \subseteq V$ ein T-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass W $g(T)$-invariant ist.

(b) Zeigen Sie, dass T und $g(T)$ kommutieren.

(c) Sei A die quadratische Blockmatrix $A := \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, wobei B, C, D quadratisch sind.

Zeigen Sie, dass $g(A)$ die Gestalt $g(A) = \begin{pmatrix} g(B) & C' \\ 0 & g(D) \end{pmatrix}$ hat.

(d) Im Beweis von Cayley-Hamilton (Skrip 14, erste Seite) ist geschrieben:
$f(T) = [\det(xI - A)](T) = \det[(xI - A)(T)] = \det(B)$.
Die Gleichung $[\det(xI - A)](T) = \det[(xI - A)(T)]$ wurde aber nicht bewiesen; Zeigen Sie es.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
In Skript 15 Beispiel 2 ist Folgendes bewiesen: Falls $TU = UT$ gilt, sind $Im(U)$ und $Ker(U)$ T-invariant. Wir wollen die Rückrichtung dieser Implikation untersuchen.

(a) Zeigen Sie, dass die Rückrichtung im Allgemeinen falsch ist.

Sei jetzt $P \in L(V, V)$, so dass $P^2 = P$.

(b) Zeigen Sie, dass $V = Ker(P) \bigoplus Im(P)$

(c) Wir nehmen an, dass $Im(P)$ und $Ker(P)$ T-invariant sind. Zeigen Sie, dass P und T kommutieren.

Die letzte Frage ist von den anderen unabhängig:

(d) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, deren Matrix in der kanonischen Basis

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Geben Sie die T-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 3
(5 Punkte)
Definition: Das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $P, Q \in K[X]$ ist ein Polynom $kgV(P,Q) \in K[X]$, so dass:

- P und Q teilen $kgV(P,Q)$.
- Falls $P \mid R$ und $Q \mid R$, gilt auch $kgV(P,Q) \mid R$ für alle $R \in K[X]$.

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $T : V \to V$ linear sowie $U_1, U_2 \subseteq V$ T-invariante Unterräume mit $U_1 + U_2 = V$. Für $i \in \{1,2\}$ sei μ_i das Minimalpolynom von $T|_{U_i} : U_i \to U_i$. Ferner sei μ das Minimalpolynom von T. Zeigen Sie: $\mu = \mathrm{kgV}(\mu_1, \mu_2)$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei K ein Körper. Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum von V. Sei $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W.

(a) Sei $\mathcal{B}''$ eine Untermenge von V so, dass $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine Basis für V ist und $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' = \emptyset$ ist. Beweisen Sie, dass $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W ist.

(b) Umgekehrt sei $\{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\} \subseteq V$ mit $\{\overline{\alpha_{r+1}}, ..., \overline{\alpha_n}\}$ eine Basis für V/W. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra Punkte)
Erinnerung: Ein Polynom $f \in K[X]$ heißt irreduzibel über K, falls Folgendes gilt: Für alle $g \in K[X]$, $g \mid f$ impliziert $\deg(g) = 0$ oder $\deg(g) = \deg(f)$.

Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n$ endlich und $T \in L(V,V)$. Zeigen Sie, dass die folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. V und $\{0\}$ sind die einzigen T-invarianten Unterräume von V.
2. $Char.Pol(T)$ ist irreduzibel über K.

Hinweis: falls 1. gilt, können Sie zunächst zeigen, dass $Min.Pol(T) = Char.Pol(T)$.

Abgabe: Donnerstag, 16. Juni 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.