Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 11

Aufgabe 1
(5 Punkte)

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ so dass $P^{-1}AP$ in Jordan Normalform ist und geben Sie die Jordan Normalform von A an.

(b) Berechnen Sie die Jordan Normalform der folgenden komplexwertigen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
(5 Punkte)
In dieser Aufgabe dürfen Sie nur Skripte 17 und 18 (über Jordan-Matrizen) und Aufgabe 4 Blatt 10 anwenden. Wir wollen Proposition 1 auf Seite 2 im Skript 13 und Satz 1 auf Seite 2 im Skript 12 erneut zeigen, also dürfen diese nicht angewandt werden.

(a) Zeigen Sie mithilfe der Jordanschen Normalform: T ist diagonalisierbar, falls $Min.Pol(T)$ in Linearfaktoren zerfällt.

(b) Zeigen Sie mithilfe der Jordanschen Normalform: T ist diagonalisierbar, falls $Char.Pol(T)$ in Linearfaktoren zerfällt und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts mit der algebraischen Vielfachheit in $Char.Pol(T)$ übereinstimmt.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

(a) Sei $||x||_1 := |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Sei $||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $||x||_\infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4
(5 Punkte)

(a) Sei $(\ |\ )$ das innere Standardprodukt auf $\mathbb{R}^4$, und seien $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,4,5)$, $v_3 = (1,-3,-4,-2)$. Finden Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich $(\ |\ )$) von $W := \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

(b) Sei $\{x_1, ..., x_n\}$ eine vollständige orthonormale Menge in einem inneren Produktraum und sei $y_i = \sum_{j=1}^{i} x_j$. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf $y_1, ..., y_n$ an und erhalten neue Elemente $z_1, ..., z_n$. Drücken sie $z_1, ..., z_n$ als Linearkombination der x_{ij} aus.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Endlichdimensionalität in der Voraussetzung des Rieszschen Darstellungssatzes (Satz 3 aus Skript 20) nicht fortgelassen werden kann.
Es sei $V = \mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome mit komplexen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, dass $(p|q) := \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt$ ein inneres Produkt auf V definiert.

(b) Zeigen Sie: Ist $p = \Sigma_{j=0}^{\infty} a_j X^j$, $q = \Sigma_{k=0}^{\infty} b_k X^k$, so ist $(p|q) = \Sigma_{j,k\in\mathbb{N}} \frac{a_j \overline{b_k}}{j+k+1}$

Es sei nun $c \in K$ fest. Dann ist durch $L(p) = p(c)$ offenbar ein lineares Funktional auf V definiert. Wir nehmen an, dass es ein $p_0 \in V$ gibt so, dass $(q|p_0) = L(q)$ für alle $q \in V$, also $q(c) = \int_0^1 q(t)\overline{p_0(t)}dt$ für alle $z \in V$. Außerdem sei h das lineare Polynom $X - c$.

(c) Zeigen Sie: Für alle $f \in V$ ist $\int_0^1 h(t)f(t)\overline{p_0(t)}dt = 0$

(d) Zeigen Sie nun, dass $hp_0 = 0$, also $p_0 = 0$ und damit $L = 0$, ein Widerspruch.

Abgabe: Donnerstag, 30. Juni 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.