Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 12

V ist überall ein K-Vektorraum mit einem inneren Produkt $(|)$, wobei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Außer der Zusatzaufgabe ist V überall endlichdimensional.

Aufgabe 1
(5 Punkte)

(a) Sei W ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass $V = W \bigoplus W^{\perp}$.

(b) Seien W_1, W_2 zwei Unterräume von V. Zeigen Sie

$$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \text{ und } (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$$

Hinweis: Für die zweite Gleichung können Sie bemerken, dass $\dim(W^{\perp}) = \dim(V) - \dim(W)$ *für alle Unterräume* W

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei ρ wie im Skript 20 Satz 4 definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V^* \times V^* & \to & K \\ (f,g) & \mapsto & (\rho(g) \mid \rho(f)) \end{array}$$

ein inneres Produkt auf V^* ist.

(b) Sei λ die in Lineare Algebra I, Skript 24 definierte Abbildung von V nach V^{**}. Seien zudem $\delta : V \to V^*$ und $\gamma : V^* \to V^{**}$ definiert durch $(x \mid y) = \delta(y)(x)$ und $(f \mid g) = \gamma(g)(f)$ für alle $x, y \in V$ und $f, g \in V^*$.

Zeigen Sie, dass $\gamma \circ \delta = \lambda$.

(c) Sei $T \in L(V,V)$. In Lineare Algebra I Skript 25 haben wir die Transponierte T^t von T als eine Abbildung in $L(V^*, V^*)$ definiert durch $T^t(f) = f \circ T$. In Lineare Algebra II Skript 20 definieren wir die Adjungierte T^* als eine Abbildung in $L(V,V)$ durch $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$ für alle $x, y \in V$. Wir haben also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{T^t} & V^* \\ \downarrow\rho & & \downarrow\rho \\ V & \xrightarrow{T^*} & V \end{array}$$

Zeigen Sie, dass dieses Diagramm kommutiert, d.h $T^* \circ \rho = \rho \circ T^t$.

Aufgabe 3
(5 Punkte)

(a) Sei W ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass $\rho(W^0) = W^\perp$.

(b) Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis für V. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ für V gibt mit $(x_i \mid y_j) = \delta_{ij}$.

(c) Sei $\mathcal{X}$ eine orthonormale Basis. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei $T \in L(V, V)$ und sei T^* definiert durch $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$.

(a) Zeigen Sie:

  (i) T^* ist wohldefiniert.

  (ii) $T^* \in L(V, V)$.

  (iii) Für alle $c \in K$ gilt $(cT)^* = \bar{c}T^*$

  (iv) Sei $\mathcal{X}$ eine Basis von V, $A := [T]_{\mathcal{X}}$ und $\mathcal{Y}$ die Basis aus Aufgabe 3. Es gilt
$$[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} =: A^*.$$

  (v) $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$

  (vi) Die Eigenwerte von A^* sind die Konjugierten der Eigenwerte von A.

  (vii) $T^{**} = T$.

Zusatzaufgabe für Interessierte
(2 extra Punkte)
Diese Aufgabe ist eine Folge zur Zusatzaufgabe aus Blatt 11. Wir wollen zeigen, dass die Endlichdimensionalität in der Voraussetzung der Existenz von Adjungierten nicht fortgelassen werden kann. Wir haben in Blatt 11 gezeigt, dass $(p|q) := \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt$ ein inneres Produkt auf $V := \mathbb{C}[x]$ definiert. Sei nun D der Ableitungsoperator auf V. Wir nehmen an, dass es eine zu D adjungierte Abbildung D^* gibt.

(a) Zeigen Sie: Für alle $p, q \in V$ ist $(Dp|q) = p(1)q(1) - p(0)q(0) - (p|Dq)$ und $(p|D^*q + Dq) = p(1)q(1) - p(0)q(0)$.
Fixieren wir q, so ist $L(p) := p(1)q(1) - p(0)q(0)$ offenbar ein lineares Funktional.

(b) Zeigen Sie: Ist $L \neq 0$, so existiert kein $h \in V$ mit $L(p) = (p|h)$ für alle $p \in V$.

(c) Zeigen Sie: Ist $h = D^*q + Dq$, so ist $L(p) = (p|h)$ für alle $p \in V$; folgern Sie, dass $q(0) = q(1) = 0$.

(d) Es sei nun $q \in V$ so, dass $q(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass dann D^*q nicht definiert ist.

Abgabe: Donnerstag, 7. Juli 2016, 10:00 Uhr, Briefkästen auf F4.