Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Blatt 13

Aufgabe 1

(a) Sei V ein endlich dimensionaler hermitescher Raum, also ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem inneren Produkt. Sei $T \in L(V, V)$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) T ist unitär.

  (ii) Es existiert eine orthonomale Basis $\mathcal{B}$ so, dass $[T]_{\mathcal{B}}$ unitär ist.

  (iii) $[T]_{\mathcal{B}}$ ist unitär für alle orthonomalen Basen $\mathcal{B}$.

(b) Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Raum, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem inneren Produkt. Sei $T \in L(V, V)$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (a) T ist orthogonal.

  (b) Es existiert eine orthonomale Basis $\mathcal{B}$ so, dass $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal ist.

  (c) $[T]_{\mathcal{B}}$ ist orthogonal für alle orthonomalen Basen $\mathcal{B}$.

Aufgabe 2

Sei V ein hermitescher Raum mit innerem Produkt $(|)$. Sei $T \in L(V, V)$.
Wenn T hermitesch und $(Tx, x) \geq 0$ (bzw. $(Tx, x) > 0$) ist, heißt T positiv (bzw. streng positiv).
Wenn $T^2 = T$, heißt T idempotent.
Sei T ein normaler Operator.

(a) Zeigen Sie, dass T genau dann positiv ist, wenn alle Eigenwerte von T positiv sind.

(b) Zeigen Sie, dass T genau dann streng positiv ist, wenn alle Eigenwerte streng positiv sind.

(c) Zeigen Sie, dass T genau dann invertierbar ist, wenn alle Eigenwerte von T ungleich null sind.

(d) Zeigen Sie, dass T genau dann idempotent ist, wenn alle Eigenwerte von T entweder 0 oder 1 sind.

Aufgabe 3

(a) Sei $T \in L(V,V)$ hermitesch, so dass $(Tx \mid x) = 0$ für alle $x \in V$. Bestimmen Sie T.

Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte von T.

(b) Sei $T \in L(V,V)$ hermitesch und sei

$$k := \sup_{\lambda \in sp(T)} (\mid \lambda \mid)$$

wobei $sp(T)$ die Menge aller Eigenwerte von T ist. Zeigen Sie, dass $||T(x)|| \leq k||x||$ für alle $x \in V$.

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Pythagoras in einer bestimmten orthonormalen Basis an.

Aufgabe 4
Erinnerung: Jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{C}[X]$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Sei $f \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $\bar{\alpha}$ auch eine Nullstelle von f ist und dass $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Wir nehmen an, dass $\deg(f) > 2$. Folgern Sie aus (a), dass f reduzibel ist.

(c) Zeigen Sie, dass die irreduzibele Polynome in $\mathbb{R}[X]$ genau die Polynome vom Grad 1 und die Polynome $aX^2 + bX + c$ vom Grad 2 mit $b^2 - 4ac < 0$ sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem kanonischen inneren Produkt. Zeigen Sie, dass $T \in L(V,V)$ genau dann eine Isometrie ist, wenn es ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die Darstellungsmatrix von T in der kanonischen Basis entweder

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ oder } B_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation für A_θ und B_θ und diagonalisieren Sie B_θ.

(b) Sei jetzt $V = \mathbb{R}^3$ und T eine Isometrie. Wir nehmen an, dass $\det(T) = 1$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine geometrische Interpretation dieser Matrix.