Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
SoSe 2016

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II (B2)

Lösungen zu Blatt 13

Aufgabe 1

(a) Wir wissen von Aufgabe 4 Blatt 12, dass für alle orthonormale Basis $\mathcal{B}$ $[T^*]_{\mathcal{B}} = \overline{[T]^t_{\mathcal{B}}}$ gilt. Damit lassen sich alle Äquivalenzen leicht zeigen.

(b) Ähnlicher Beweis, aber hier gilt $[T^*]_{\mathcal{B}} = [T]^t_{\mathcal{B}}$.

Aufgabe 2

Nach dem Spektralsatz besitzt V eine orthonormale Basis $(v_1, \dots, v_n)$, die aus Eigenvektoren von T besteht. Seien $(c_1, \dots, c_n)$ die zugehörigen Eigenwerte.

(a) Sei T positiv. Dann gilt für alle i $(Tv_i \mid v_i) = c_i(v_i \mid v_i) \geq 0$, und da $(v_i \mid v_i) \geq 0$ muss $c_i \geq 0$ gelten. Umgekehrt sei $c_1, \dots, c_n \geq 0$. Sei $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}(Tx \mid x) &= (\sum_{i=1}^n \lambda_i T v_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \\ &= (\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_i (v_i \mid v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_i c_i \geq 0\end{aligned}$$

(b) Genauso wie bei (a)

(c) Sei $A := [T]_{(v_1,\dots,v_n)}$. A ist diagonal mit Einträgen $c_1, \dots, c_n$, also gilt $\det(A) = c_1 c_2 \dots c_n$ und daraus folgt die Behauptung.

(d) Es gilt $A^2 = A$ genau dann, wenn $c_1, \dots, c_n \in \{0, 1\}$(weil A^2 eine Diagonalmatrix mit Einträgen $c_1^2, \dots, c_n^2$ ist)

Aufgabe 3

1. Sei c ein Eigenwert von T, x ein Eigenvektor zu c. Es gilt $(c.x \mid x) = 0$, also muss $c = 0$ gelten. Nach dem Spektralsatz ist T diagonalisierbar. Weil alle Eigenwerte von T null sind, muss also $T = 0$ gelten.

2. Sei $sp(T) := \{c_1, \ldots, c_n\}$. Nach dem Spektralsatz besitzt T Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$, die eine orthonormale Basis von V bilden.

   Für alle $x \in V$ gilt $||Tx||^2 = \sum_{i=1}^n \mid (Tx \mid v_i) \mid^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \mid (x \mid v_i) \mid^2 \leq k^2 \sum_{i=1}^n \mid (x \mid v_i) \mid^2 = k^2 ||x||^2$.

Aufgabe 4

(a) Sei $f = \sum_{i=1}^n a_i X^i$, $a_i \in \mathbb{R}$. $f(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{\alpha}^i = \overline{\sum_{i=1}^n a_i \alpha^i} = \bar{0} = 0$.

(b) Sei α eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$. Falls $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $X - \alpha \mid f$ in $\mathbb{R}[X]$, und $X - \alpha \neq f$ weil $\deg(f) > 2$. Wir nehmen an, $\alpha \notin \mathbb{R}$. Sei $g := (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$. Nach (a) gilt $g \mid f$ und $g \in \mathbb{R}[X]$. Zudem gilt $f \neq g$ weil $\deg(f) > 2$.

(c) Falls $\deg(f) > 2$ ist f reduzibel in $\mathbb{R}[X]$ nach (b). Falls $\deg(f) = 1$ ist f offensichtlich irreduzibel. Falls $\deg(f) = 2$ ist f genau dann reduzibel in $\mathbb{R}[X]$, wenn f eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

Zusatzaufgabe für Interessierte

(a) Weil T eine Isometrie ist, muss $\det(T) \in \{-1, 1\}$ gelten. Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Darstellungsmatrix von T in der kanonischen Basis (e_1, e_2). Es gilt $ad - bc = 1$ oder -1. Weil T eine Isometrie ist, und weil die Basis orthonormal ist, muss auch $ab + cd = 0$ gelten.

Fall $\det(T) = 1$: dann ist $ab + cd = 0$ und $ad - bc = 1$. Falls $c = 0$, gilt dann $ab = 0$ und $ad = 1$, woraus $b = 0$ folgt, also ist M diagonal. Weil T eine Isometrie ist gilt aber $||Te_1|| = ||e_1|| = 1$, also muss $a = d = 1$ oder $a = d = -1$ gelten, also $M = A_0$ oder $M = A_\pi$. Wir nehmen jetzt an, dass $c \neq 0$. Es gilt dann $c = -\frac{ab}{d}$ und $ad + \frac{ab^2}{d} = 1$, also $a(b^2 + d^2) = d$. Es gilt aber $||Te_2|| = 1$, also $b^2 + d^2 = 1$, also $a = d$, woraus auch $c = -b$ folgt. $ad - bc = 1$ wird dann zu $a^2 + c^2 = 1$, also existiert θ mit $a = \cos(\theta)$ und $b = \sin(\theta)$. T ist dann die Drehung mit Winkel θ.

Falls $\det(T) = -1$: Der Beweis ist ähnlich, aber hier bekommen wir $ad = -1$ im Fall $c = 0$, also muss $a = 1 = -d$ oder $d = 1 = -a$ gelten, also $M = A_{\frac{\pi}{2}}$ oder $M = A_{-\frac{\pi}{2}}$; im Fall $c \neq 0$ bekommen wir $a = -d$, was $b = c$ impliziert. Hier ist T eine Spiegelung. Wir zeigen es, indem wir T diagonalisieren: es gilt $Char.Pol(M) = X^2 - 1$, also sind die Eigenwerte 1 und -1. $u_\theta = \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ und $v_\theta = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ sind die Eigenvektoren. Bemerke, dass u_θ und v_θ zueinander orthogonal sind. In der Basis (u_θ, u_θ) hat T die Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. T ist also die orthogonale Spiegelung an der Gerade $span(u_\theta)$.

(b) Weil $\deg(Char.Pol(T)) = 3$, besitzt $Char.Pol(T)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ (nach dem Zwischenwertsatz hat jedes Polynom von ungeradem Grad eine Nullstelle in $\mathbb{R}$), also hat T einen Eigenwert

c. Sei u ein Eigenvektor zu c und $W := span(u)$. Weil T eine Isometrie ist, ist $W^\perp$ T-invariant. $T_{W^\perp}$ kann als Isometrie auf $\mathbb{R}^2$ aufgefasst werden. Nach (a) gibt es also eine Basis $\mathcal{B}$ von $W^\perp$ mit $M := [T_{W^\perp}]_\mathcal{B} = A_\theta$ oder B_θ, $\theta \in \mathbb{R}$. Es gilt dann $[T]_{\mathcal{B}\cup\{u\}} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, also entweder

$[T]_{\mathcal{B}\cup\{u\}} = \begin{pmatrix} A_\theta & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ oder $[T]_{\mathcal{B}\cup\{u\}} = \begin{pmatrix} B_\theta & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Weil T eine Isometrie ist muss $c \in \{-1, 1\}$ gelten. Falls $c = 1$ muss wegen $\det(T) = 1$ auch $\det(M) = 1$ gelten, woraus $M = A_\theta$ folgt. T ist dann eine Drehung um die Gerade W mit Winkel θ.

Wir nehmen an, dass $c = -1$. Dann muss $\det(M) = -1$ gelten, also $M = B_\theta$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$. $T_{W^\perp}$ ist also eine Spiegelung an einer Gerade. Sei v ein Vektor dieser Gerade; dann ist v ein Fixpunkt von T. Wir können jetzt u mit v ersetzen, was zum Fall $c = 1$ zurückführt.