Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
25. Juli 2016

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2016

Klausur zur Linearen Algebra II (B2)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
erreichte Punktzahl								
Korrektor (Initialen)								
Maximalpunktzahl	10	10	10	10	10	10	10	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Von den 7 Aufgaben werden nur die **besten 6 gewertet**.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
5. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
6. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
7. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
8. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, dürfen Sie sämtliche Begriffe aus der Vorlesung Lineare Algebra I des vergangenen Wintersemesters als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe und Notationen müssen definiert werden.
9. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
10. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Sei K ein Körper. Geben Sie die Definition eines *irreduziblen Polynoms* in $K[x]$ an.
Dabei dürfen Sie den Begriff „Polynom" als bekannt voraussetzen.

(b) (5 Punkte) Seien $f = x^3 - 2x^2 - x + 2$ und $g = x^2 + x - 2$ in $\mathbb{Q}[x]$. Finden Sie einen Erzeuger des Ideals $f\mathbb{Q}[x] + g\mathbb{Q}[x]$.

(c) (3 Punkte) Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) = 0$, sei D die formale Ableitung auf $K[x]$ und sei $\mathscr{A}$ ein Ideal von $K[x]$ mit der folgenden Eigenschaft: Für alle $f \in K[x]$ gilt: $f \in \mathscr{A}$ impliziert $Df \in \mathscr{A}$. Zeigen Sie, dass entweder $\mathscr{A} = \{0\}$ oder $\mathscr{A} = K[x]$ gilt.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 2 (10 Punkte).
S_n bezeichnet die Gruppe aller Permutationen auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

(a) (2 Punkte) Wie ist die Abbildung sign auf S_n definiert?

Sie dürfen den Begriff „Permutation" als bekannt voraussetzen.

(b) (4 Punkte) Sei

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_7.$$

Schreiben Sie σ erst als Produkt disjunkter Zykel und dann als Produkt von Transpositionen. Ist σ gerade oder ungerade?

(c) (4 Punkte) Sei $n \geq 3$ und seien σ, τ zwei verschiedene Transpositionen. Zeigen Sie, dass $\sigma\tau$ entweder ein 3-Zykel oder ein Produkt von zwei 3-Zykeln ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie die folgenden beiden Fälle: (i) σ und τ sind disjunkt. (ii) σ und τ sind nicht disjunkt.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Wie ändert sich die Determinante einer Matrix nach Anwendung der drei elementaren Zeilenumformungen?

(b) (4 Punkte) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix in $\mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

(c) (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: Aus $A^t = -A$ folgt, dass A nicht invertierbar ist. Zeigen Sie dann, dass diese Aussage für den Fall $n = 2$ falsch ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 4 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Definieren Sie die Begriffe *Eigenwert*, *Eigenvektor* sowie *Eigenraum*.

(b) (4 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Finden Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, sodass $P^{-1}AP$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(c) (2 Punkte). Bestimmen Sie die jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$.

(d) (2 Punkte). Seien $n \geq 1$ und $m \geq 1$ natürliche Zahlen. Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, sodass die Eigenwerte von A sich von den Eigenwerten von B paarweise unterscheiden. Seien C und D die jordanschen Normalformen von A bzw. B. Bestimmen Sie die jordansche Normalform von

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+m)\times(n+m)}$$

über $\mathbb{C}$.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 2 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 4 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 5 (10 Punkte).

Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei $T \in \mathscr{L}(V, V)$.

(a) (2 Punkte). Seien W und W' Unterräume von V. Definieren Sie den Ausdruck $W \oplus W'$ und was es bedeutet, dass T *diagonalisierbar* ist.

Sie dürfen den Begriff „Eigenvektor“ als bekannt voraussetzen.

Sei nun $P \in \mathscr{L}(V, V)$ idempotent, d. h. $P^2 = P$.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle möglichen Eigenwerte von P und bringen Sie die Eigenräume in Verbindung mit $\ker(P)$ und $\mathrm{Bild}(P)$.

(d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass P diagonalisierbar ist und finden Sie die Diagonalform.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung, **nicht jedoch aus den Übungen**, verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 2 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 4 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 6 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Definieren Sie Min.Pol.(A).
Dabei dürfen Sie die Begriffe „Polynom" und „Determinante" als bekannt voraussetzen.

(b) (5 Punkte) Seien $a \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a & -a & -2a \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Min.Pol.(A). Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ mithilfe von Min.Pol.(A).
Hinweis: Unterscheiden Sie die beiden Fälle „k gerade"und „k ungerade".

(c) (3 Punkte) Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Sei $T \in \mathscr{L}(V,V)$, sodass

$$T^3 + 2T^2 - T - 2\mathrm{Id} = 0,$$

wobei Id die Identität auf V bezeichnet. Zeigen Sie, dass T invertierbar ist.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 2 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 4 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl: **Korrektor (Initialen):**

Aufgabe 7 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Sei K ein Körper, sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit innerem Produkt $(.|.)$ und sei $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$ orthonormal. Geben Sie fünf äquivalente Charakterisierungen dafür an, dass S *vollständig* ist.

(b) (5 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie eine orthonormale Basis (bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^4$) von $\ker(A)$.

(c) (2 Punkte). Sei V ein euklidischer Raum, also ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit innerem Produkt $(.|.)$, und sei $T \in \mathscr{L}(V, V)$ eine Isometrie mit $T^2 = -\mathrm{Id}$, wobei Id die Identität auf V bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $x \in V$ gilt: $T(x)$ ist orthogonal zu x.

Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.

Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 2 zu Aufgabe 7

Matrikelnummer:

Seite 3 zu Aufgabe 7

erreichte Punktzahl:

Korrektor (Initialen):

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 4 zu Aufgabe 7