**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**05. Oktober 2016**

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2016

# Nachklausur zur Linearen Algebra II (B2)

**Klausurnummer:** 1

**Matrikelnummer:**

Pseudonym:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |
| Korrektor (Initialen) | | | | | | | | |
| Maximalpunktzahl | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Von den 7 Aufgaben werden nur die **besten 6 gewertet**.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
5. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
6. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
7. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
8. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, dürfen Sie sämtliche Begriffe aus der Vorlesung Lineare Algebra I des vergangenen Wintersemesters als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe und Notationen müssen definiert werden.
9. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
10. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 1 (10 Punkte).**
Sei $K$ ein Körper und sei $K[x]$ die Polynomalgebra über $K$.

(a) (2 Punkte) Sei $f \in K[x]$. Zeigen Sie, dass $fK[x] = \{fg \mid g \in K[x]\}$ ein Ideal in $K[x]$ ist.

*Sie sollen zeigen, dass $fK[x]$ alle Eigenschaften eines Ideals erfüllt, und dürfen dafür sämtliche grundlegenden Eigenschaften von Polynomen über K verwenden.*

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie:

$$(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1)\mathbb{R}[x] + (x^3 + 4x^2 - x - 4)\mathbb{R}[x] = (x^2 - 1)\mathbb{R}[x].$$

(c) (3 Punkte) Sei $T : K_2[x] \to K_2[x]$ die lineare Abbildung, welche $f \in K_2[x]$ auf das konstante Polynom $(Df)(1)$ abbildet, wobei $K_2[x]$ der $K$-Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ist und $Df$ die formale Ableitung von $f$ bezeichnet. Finden Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von $T$.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 1:**

## Seite 2 zu Aufgabe 1

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:**

## Seite 4 zu Aufgabe 1

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 2 (10 Punkte).**

(a) (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definieren Sie die Gruppe $(S_n, \circ)$.

(b) (5 Punkte) Seien $\sigma := (1\ 7\ 5\ 3)(8\ 9), \rho := (1\ 7)(4\ 6)(8\ 9) \in S_9$. Schreiben Sie $\sigma$ als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie $(\sigma\rho)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) (3 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

Für $\sigma, \rho \in S_3$ definiere die Matrix $A(\sigma, \rho) \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ durch

$$[A(\sigma,\rho)]_{ij} = [A]_{\sigma(i),\rho(j)}$$

für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Finden Sie alle Paare $(\sigma, \rho) \in S_3 \times S_3$ mit der Eigenschaft, dass $A(\sigma, \rho) = A$.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 2:**

## Seite 2 zu Aufgabe 2

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:**

## Seite 4 zu Aufgabe 2

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 3 (10 Punkte).**
Seien $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie die Formel zur Berechnung der Determinante einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ über die Spaltenentwicklung bezüglich einer beliebigen Spalte $1 \leq j \leq n$ an.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Matrix in $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

(c) (4 Punkte) Seien $A, A_1, \ldots, A_\ell \in K^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrizen. Beweisen Sie nur unter Verwendung der Spaltenentwicklungsformel in (a), dass $\det(A)$ das Produkt der Diagonaleinträge von $A$ ergibt. Folgern Sie, dass die Matrix

$$A_1 A_2 \ldots A_\ell$$

genau dann invertierbar ist, wenn 0 nicht in

$$\{[A_k]_{ii} \mid 1 \leq k \leq \ell,\ 1 \leq i \leq n\},$$

der Menge aller Diagonaleinträge aller Matrizen $A_1, \ldots, A_\ell$, enthalten ist.

*Für die Folgerung dürfen Sie alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 3:**

## Seite 2 zu Aufgabe 3

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:**

## Seite 4 zu Aufgabe 3

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 4**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 4 (10 Punkte).**
Seien $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $T \in \mathscr{L}(V, V)$.

(a) (2 Punkte) Definieren Sie die Begriffe *Eigenvektor* und *Eigenwert* von $T$ sowie *Jordankette* bezüglich eines Eigenwertes von $T$.

Seien nun $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$. Seien $c$ und $d$ Eigenwerte von $T$ mit $c \neq d$. Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Jordankette bezüglich $c$ von $T$ und sei $\{w_1\}$ eine Jordankette bezüglich $d$ von $T$. Sei $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, w_1\}$.

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{v_1, w_1\}$ linear unabhängig ist und dass $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist. Folgern Sie, dass $\mathscr{B}$ linear unabhängig ist.

***Sie dürfen nur die Definitionen in (a) sowie sämtliche Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Linearen Algebra I verwenden, solange Sie diese klar benennen.***

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $[T]_{\mathscr{B}}$.

**Lösung zu Aufgabe 4:**

## Seite 2 zu Aufgabe 4

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 4**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:**

## Seite 4 zu Aufgabe 4

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 5**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 5 (10 Punkte).**

(a) (2 Punkte) Seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times n}$. Was ist eine notwendige und was ist eine hinreichende Bedingung für $\text{Char.Pol.}(A)$, damit $A$ diagonalisierbar ist? Beantworten Sie die gleiche Frage für $\text{Min.Pol.}(A)$ anstelle von $\text{Char.Pol.}(A)$.

(b) (5 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Finden Sie $D, P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $D$ diagonal und $P$ invertierbar, sodass $P^{-1}AP = D$.

(c) (3 Punkte) Seien $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und $T, S \in \mathscr{L}(V, V)$. Wir nehmen an, $T$ sei diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass $T$ und $S$ genau dann kommutieren, wenn alle Eigenräume von $T$ $S$-invariant sind.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 5:**

## Seite 2 zu Aufgabe 5

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 5**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:**

## Seite 4 zu Aufgabe 5

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 6**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 6 (10 Punkte).**

(a) (2 Punkte) Seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Definieren Sie Min.Pol.$(A)$.
*Dabei dürfen Sie die Begriffe „Polynom" und „Determinante" als bekannt voraussetzen.*

(b) (6 Punkte) Sei
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$
Finden Sie $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, sodass $P^{-1}AP$ in jordanscher Normalform ist, und geben Sie die jordansche Normalform von $A$ an.

(c) (2 Punkte) Sei $A$ eine Matrix mit Einträgen aus $K$, sodass Char.Pol.$(A) = (X-1)^3(X+2)$. Finden Sie alle jordanschen Normalformen, die für $A$ infrage kommen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

**Lösung zu Aufgabe 6:**

## Seite 2 zu Aufgabe 6

**Matrikelnummer:**

**Seite 3 zu Aufgabe 6**

**erreichte Punktzahl:**

**Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:**

## Seite 4 zu Aufgabe 6

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 7**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 7 (10 Punkte).**
Seien $K$ ein Körper ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) und $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum mit innerem Produkt $(.|.)$.

(a) (2 Punkte) Sei $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Beschreiben Sie ein Verfahren, durch das $\mathscr{B}$ in eine orthonormale Basis von $V$ überführt wird.

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) := \det \begin{pmatrix} 2a & d \\ -b & c \end{pmatrix}$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Finden Sie eine orthonormale Basis $\{w_1, w_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses inneren Produktes mit der Eigenschaft, dass

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| w_2 \right) = 0.$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right) := \det \begin{pmatrix} a & f & 1 \\ b & e & 1 \\ c & d & 1 \end{pmatrix}$$

kein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 7:**

## Seite 2 zu Aufgabe 7

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 7**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:**

## Seite 4 zu Aufgabe 7