**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**05. Oktober 2016**

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Gabriel Lehéricy
Lothar Sebastian Krapp
Sommersemester 2016

# Nachklausur zur Linearen Algebra II (B2)

**Klausurnummer:** 1

**Matrikelnummer:**

Pseudonym:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |
| Korrektor (Initialen) | | | | | | | | |
| Maximalpunktzahl | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | |

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Klausurbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Von den 7 Aufgaben werden nur die **besten 6 gewertet**.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
5. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
6. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
7. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt. (Das gelbe Konzeptpapier dient lediglich für eigene Notizen. In der Wertung wird ausschließlich das berücksichtigt, was auf dem Klausurbogen oder dem weißen Arbeitspapier steht.)
8. In Aufgaben, in denen Definitionen verlangt werden, dürfen Sie sämtliche Begriffe aus der Vorlesung Lineare Algebra I des vergangenen Wintersemesters als bekannt voraussetzen. Alle anderen von Ihnen vewendeten Begriffe und Notationen müssen definiert werden.
9. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art (Arbeits- bzw. Konzeptpapier) in der Hand.
10. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 Minuten**.

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 1 (10 Punkte).**
Sei $K$ ein Körper und sei $K[x]$ die Polynomalgebra über $K$.

(a) (2 Punkte) Sei $f \in K[x]$. Zeigen Sie, dass $fK[x] = \{fg \mid g \in K[x]\}$ ein Ideal in $K[x]$ ist.

*Sie sollen zeigen, dass $fK[x]$ alle Eigenschaften eines Ideals erfüllt, und dürfen dafür sämtliche grundlegenden Eigenschaften von Polynomen über K verwenden.*

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie:

$$(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1)\mathbb{R}[x] + (x^3 + 4x^2 - x - 4)\mathbb{R}[x] = (x^2 - 1)\mathbb{R}[x].$$

(c) (3 Punkte) Sei $T : K_2[x] \to K_2[x]$ die lineare Abbildung, welche $f \in K_2[x]$ auf das konstante Polynom $(Df)(1)$ abbildet, wobei $K_2[x]$ der $K$-Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 ist und $Df$ die formale Ableitung von $f$ bezeichnet. Finden Sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von $T$.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 1: (a)** $0 \in fK[x]$, da $0 \in K[x]$ und $f \cdot 0 = 0$. Seien $a, b \in fK[x]$ und sei $p \in K[x]$. Dann existieren $g, h \in K[x]$ mit $a = fg$ und $b = fh$. Also $a + b = fg + fh = f(g + h) \in fK[x]$, da $g + h \in K[x]$. Weiterhin ist $pa = p(fg) = f(pg) \in fK[x]$, da $pg \in K[x]$.

**(b)** Wir verwenden das Resultat aus der Übung, dass für einen Körper $K$ und Polynome $f, g \in K[x] \setminus \{0\}$ gilt, dass $fK[x] + gK[x] = \text{ggT}(f, g)K[x]$. Der größten gemeinsamen Teiler der Polynome $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ und $x^3 + 4x^2 - x - 4$ lässt sich durch den Divisionsalgorithmus berechnen.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1 &= (x^3 + 4x^2 - x - 4)(x - 1) + (3x^2 - 3) \\ x^3 + 4x^2 - x - 4 &= (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{3}(x + 4) + 0 \end{aligned}$$

Damit ist $x^2 - 1$ der größte gemeinsame Teiler der beiden ursprünglichen Polynome.

**(c)** Ein allgemeines Polynom in $K_2[x]$ hat die Form $p = ax^2 + bx + c$ für $a, b, c \in K$. Für dieses $p$ gilt $Dp = 2ax + b$ und deshalb $T(p) = (Dp)(1) = 2a + b$. Ein Eigenwert $\lambda \in K$ von $T$ mit Eigenvektor $p$ muss erfüllen $T(p) = \lambda p$, also $2\lambda a + \lambda b = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$. Ein Koeffizientenvergleich gibt uns $a = 0$, $b = 0$ und $2\lambda a + \lambda b = \lambda c$, also $\lambda c = 0$. Da im Falle $c = 0$ das Polynom $p = 0$ und damit kein Eigenvektor wäre, muss $\lambda = 0$ gelten. Also ist 0 der einzige Eigenwert und die Eigenvektoren sind alle konstanten Polynome, die nicht 0 sind.

**Seite 2 zu Aufgabe 1**

Alternativ lässt sich $T$ bezüglich der Basis $\{1, x, x^2\}$ darstellen. Die Darstellungsmatrix ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat als einzigen Eigenwert 0 und und die Eigenvektoren sind von der Form

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für beliebige $c \in K \setminus \{0\}$. Die Eigenvektoren sind also alle konstanten Polynome, die nicht 0 sind.

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 1**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:**

## Seite 4 zu Aufgabe 1

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 2 (10 Punkte).**

(a) (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definieren Sie die Gruppe $(S_n, \circ)$.

(b) (5 Punkte) Seien $\sigma := (1\ 7\ 5\ 3)(8\ 9), \rho := (1\ 7)(4\ 6)(8\ 9) \in S_9$. Schreiben Sie $\sigma$ als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie $(\sigma\rho)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) (3 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

Für $\sigma, \rho \in S_3$ definiere die Matrix $A(\sigma, \rho) \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ durch

$$[A(\sigma, \rho)]_{ij} = [A]_{\sigma(i),\rho(j)}$$

für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Finden Sie alle Paare $(\sigma, \rho) \in S_3 \times S_3$ mit der Eigenschaft, dass $A(\sigma, \rho) = A$.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 2: (a)** Eine Permutation $\sigma$ auf $\{1, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$. Die Menge $S_n$ ist die Menge aller Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$. Zusammen mit der Operation $\circ$, wobei $\circ$ die Komposition von Funktionen ist (d. h. für $\sigma, \rho \in S_n$ gilt $\sigma \circ \rho : k \mapsto \sigma(\rho(k))$), bildet $S_n$ eine Gruppe.

**(b)** $\sigma = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 7)(8\ 9)$.
$(\sigma\rho)^0 = \mathrm{id}$.
$\sigma\rho = (1\ 3)(1\ 5)(1\ 7)(8\ 9)(1\ 7)(4\ 6)(8\ 9) = (1\ 3)(1\ 5)(4\ 6) = (1\ 5\ 3)(4\ 6)$ (wegen Assoziativität und der Tatsache, dass disjunkte Zykel kommutieren). Mit dieser Darstellung lassen sich die Potenzen von $\sigma\rho$ schnell finden:

$$(\sigma\rho)^k = (1\ 5\ 3)^k(4\ 6)^k = \begin{cases} \mathrm{id} & \text{falls } k \equiv 0 \mod 6, \\ (1\ 5\ 3)(4\ 6) & \text{falls } k \equiv 1 \mod 6, \\ (1\ 3\ 5) & \text{falls } k \equiv 2 \mod 6, \\ (4\ 6) & \text{falls } k \equiv 3 \mod 6, \\ (1\ 5\ 3) & \text{falls } k \equiv 4 \mod 6, \\ (1\ 3\ 5)(4\ 6) & \text{falls } k \equiv 5 \mod 6. \end{cases}.$$

**(c)** Wir stellen fest, dass $\sigma$ eine Permutation der Zeilen und $\rho$ eine Permutation der Spalten angibt. (Weiterhin merken wir, dass $A(\sigma, \rho) = A$ genau dann gilt, wenn $A(\sigma^{-1}, \rho^{-1}) = A$ gilt.) Wir suchen also alle Paare von Zeilen- und Spaltenpermutation, die $A$ unverändert lassen. Zeile 1 kann nur mit Zeile 3 getauscht werden, ebenso kann Spalte 1 nur mit Spalte 3 getauscht werden. Wir erhalten also folgende Paare von möglichen Permutationen: $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$, $((1\ 3), \mathrm{id})$, $(\mathrm{id}, (1\ 3))$, $((1\ 3), (1\ 3))$.

## Seite 2 zu Aufgabe 2

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 2**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

## Seite 4 zu Aufgabe 2

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 3 (10 Punkte).**
Seien $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie die Formel zur Berechnung der Determinante einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ über die Spaltenentwicklung bezüglich einer beliebigen Spalte $1 \leq j \leq n$ an.

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Matrix in $\mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

(c) (4 Punkte) Seien $A, A_1, \ldots, A_\ell \in K^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrizen. Beweisen Sie nur unter Verwendung der Spaltenentwicklungsformel in (a), dass $\det(A)$ das Produkt der Diagonaleinträge von $A$ ergibt. Folgern Sie, dass die Matrix

$$A_1 A_2 \ldots A_\ell$$

genau dann invertierbar ist, wenn 0 nicht in

$$\{[A_k]_{ii} \mid 1 \leq k \leq \ell,\ 1 \leq i \leq n\},$$

der Menge aller Diagonaleinträge aller Matrizen $A_1, \ldots, A_\ell$, enthalten ist.

*Für die Folgerung dürfen Sie alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 3: (a)**

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \det(A[i|j]),$$

wobei $[A]_{ij}$ den Eintrag in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte von $A$ bezeichnet und die Matrix $A[i|j]$ die Matrix ist, die man durch Streichen der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte in $A$ erhält.
**(b)** $A$ ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante ungleich 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} - a \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2,$$

da für obere und untere Dreiecksmatrizen die Determinante das Produkt der Diagonaleinträge ist. Nun ist $1 - a^2 = (1+a)(1-a) = 0$ genau dann, wenn $a = 1$ oder $a = -1$. Also ist die Matrix genau dann invertierbar, wenn $a \neq 1$ und $a \neq -1$.

**Seite 2 zu Aufgabe 3**

**(c)** Seien $a_{ij}$ die Einträge von $A$. Wir zeigen durch Induktion, dass $\det A = \prod_{\ell=1}^{n} a_{\ell\ell}$.
$n = 1$: $\det(a_{11}) = a_{11}$.
Nehme an, die Aussage sei für $n-1$ bewiesen. Dann gilt für die Spaltenentwicklung über $j = 1$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A[i|1]) = a_1 \det(A[1|1]),$$

da alle anderen Einträge in Spalte 1 außer dem ersten gleich 0 sind. Nach Induktionsvoraussetzung, da $A[1|1]$ eine obere Dreiecksmatrix ist, gilt $\det A[1|1] = \prod_{\ell=2}^{n} a_{\ell\ell}$. Es folgt $\det A = \prod_{\ell=1}^{n} a_{\ell\ell}$.

Wir wissen, dass $\det(A_1 \dots A_\ell) = \det(A_1) \dots \det(A_\ell)$ gilt. Da die Matrizen alle obere Dreiecksmatrizen sind, ist $\det(A_1 \dots A_\ell)$ das Produkt aller Diagonaleinträge von $A_1$ bis $A_\ell$. Dieses Produkt wird genau dann 0, wenn ein Diagonaleintrag in einer der Matrizen $A_1, \dots, A_\ell$ gleich 0 ist. Also ist $(A_1 \dots A_\ell)$ genau dann invertierbar, wenn keine der Matrizen einen Diagonaleintrag 0 hat.

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 3**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:**

## Seite 4 zu Aufgabe 3

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 4**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 4 (10 Punkte).**
Seien $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und $T \in \mathscr{L}(V, V)$.

(a) (2 Punkte) Definieren Sie die Begriffe *Eigenvektor* und *Eigenwert* von $T$ sowie *Jordankette* bezüglich eines Eigenwertes von $T$.

Seien nun $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^3$. Seien $c$ und $d$ Eigenwerte von $T$ mit $c \neq d$. Sei $\{v_1, v_2\}$ eine Jordankette bezüglich $c$ von $T$ und sei $\{w_1\}$ eine Jordankette bezüglich $d$ von $T$. Sei $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, w_1\}$.

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass $\{v_1, w_1\}$ linear unabhängig ist und dass $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist. Folgern Sie, dass $\mathscr{B}$ linear unabhängig ist.

***Sie dürfen nur die Definitionen in (a) sowie sämtliche Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Linearen Algebra I verwenden, solange Sie diese klar benennen.***

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie $[T]_{\mathscr{B}}$.

**Lösung zu Aufgabe 4:**
**(a)** Ein Eigenvektor $v$ von $T$ mit zugehörigem Eigenwert $c \in K$ ist ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $Tv = cv$. Eine Jordankette der Länge $n \geq 1$ bezüglich $c$ ist ein Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ in $V$ mit $v_1 \neq 0$, $(T - cI)v_k = v_{k-1}$ für $k = 2, \dots, n$ und $(T - cI)v_1 = 0$.

**(b)** Aufgrund der Eigenschaften von Jordanketten haben wir $v_1, w_1 \neq 0$, $(T - cI)v_1 = 0$, $(T - cI)v_2 = v_1$, $Tw_1 = dw_1$, folglich $(T - cI)w_1 = (d - c)w_1$.
Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu w_1 = 0$. Dann gilt:

$$0 = (T - cI)(\lambda v_1 + \mu w_1) = \lambda(T - cI)v_1 + \mu(T - cI)w_1 = \mu(d - c)w_1.$$

Da $w_1 \neq 0$ und $d \neq c$, muss $\mu = 0$ sein. Analog mit $(T - dI)$ anstelle von $(T - cI)$ kann man zeigen, dass $\lambda = 0$ sein muss. Also ist $\{v_1, w_1\}$ linear unabhängig.
Seien $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$. Dann gilt:

$$0 = (T - cI)(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda(T - cI)v_1 + \mu(T - cI)v_2 = \mu v_1.$$

Da $v_1 \neq 0$, muss gelten $\mu = 0$. Also $\lambda v_1 = 0$. Da $v_1 \neq 0$, muss also auch $\lambda = 0$ sein. Folglich ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig.
Seien $\lambda, \mu, \kappa \in \mathrm{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 + \kappa w_1 = 0$. Dann gilt:

$$0 = (T - cI)(\lambda v_1 + \mu v_2 + \kappa w_1) = \lambda(T - cI)v_1 + \mu(T - cI)v_2 + \kappa(T - cI)w_1 = \mu v_1 + \kappa(d - c)w_1.$$

Da $\{v_1, w_1\}$ linear unabhängig ist, folgt, dass $\mu = \kappa(d - c) = 0$. Da $d \neq c$, folgt $\kappa = 0$. Also ist $\lambda v_1 = 0$ und deshalb $\lambda = 0$. Daher ist $\mathscr{B}$ linear unabhängig.

## Seite 2 zu Aufgabe 4

$$[T]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

da $Tv_1 = cv_1$, $Tv_2 = v_1 + cv_2$ und $Tw_1 = dw_1$.

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 4**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:**

## Seite 4 zu Aufgabe 4

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 5**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 5 (10 Punkte).**

(a) (2 Punkte) Seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in K^{n \times n}$. Was ist eine notwendige und was ist eine hinreichende Bedingung für Char.Pol.$(A)$, damit $A$ diagonalisierbar ist? Beantworten Sie die gleiche Frage für Min.Pol.$(A)$ anstelle von Char.Pol.$(A)$.

(b) (5 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Finden Sie $D, P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $D$ diagonal und $P$ invertierbar, sodass $P^{-1}AP = D$.

(c) (3 Punkte) Seien $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum und $T, S \in \mathscr{L}(V, V)$. Wir nehmen an, $T$ sei diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass $T$ und $S$ genau dann kommutieren, wenn alle Eigenräume von $T$ $S$-invariant sind.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 5: (a)** Eine notwendige Bedingung ist, dass Char.Pol. über $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Eine hinreichende ist, dass all jene Linearfaktoren verschieden sind, d. h. kein Eigenwert algebraische Vielfachheit größer gleich 2 hat.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung ist, dass Min.Pol. über $K[x]$ in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

**(b)** Wir suchen eine Matrix $P$, deren Spalten aus Eigenvektoren von $A$ bestehen. Char.Pol.$(A)(x) = (x-1)(x+1)^2$. Die Eigenwerte sind also 1 und $-1$.

Eigenvektor zu 1: Bringe $(A - I)$ in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies gibt uns den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eigenvektoren zu $-1$: Bringe $(A + I)$ in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies gibt uns die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Seite 2 zu Aufgabe 5**

Für
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
und
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
gilt also $P^{-1}AP = D$.

**(c)** Da $T$ diagonalisierbar ist, existiert eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $V$ aus Eigenvektoren von $T$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Seien $W_1, \ldots, W_n$ die Eigenräume, die zu den jeweiligen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ korrespondieren.

Nehme an, $T$ und $S$ kommutieren. Wir zeigen, dass $W_1$ ein $S$-invarianter Unterraum ist. Sei $w_1 \in W_1$. Dann ist $Tw_1 = \lambda_1 w_1$, also $T(Sw_1) = STw_1 = S(\lambda_1 w_1) = \lambda_1(Sw_1)$. Daher ist auch $Sw_1 \in W_1$, also $S(W_1) \subseteq W_1$. Die Aussage für $W_2, \ldots, W_n$ folgt analog.

Nehme an, $W_1, \ldots, W_n$ sind $S$-invariant. Es genügt zu zeigen, dass $S$ und $T$ auf der Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von $V$ kommutieren, da diese Eigenschaft durch Linearität für ganz $V$ verallgemeinert werden kann. Nun ist $Sv_1 \in W_1$ wegen $S$-Invarianz, also $TSv_1 = \lambda_1 Sv_1 = S\lambda_1 v_1 = STv_1$. Die Aussage für $v_2, \ldots, v_n$ folgt analog.

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 5**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:**

## Seite 4 zu Aufgabe 5

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 6**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 6 (10 Punkte).**

(a) (2 Punkte) Seien $K$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Definieren Sie Min.Pol.$(A)$.
*Dabei dürfen Sie die Begriffe „Polynom“ und „Determinante“ als bekannt voraussetzen.*

(b) (6 Punkte) Sei
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$
Finden Sie $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, sodass $P^{-1}AP$ in jordanscher Normalform ist, und geben Sie die jordansche Normalform von $A$ an.

(c) (2 Punkte) Sei $A$ eine Matrix mit Einträgen aus $K$, sodass Char.Pol.$(A) = (X-1)^3(X+2)$. Finden Sie alle jordanschen Normalformen, die für $A$ infrage kommen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

**Lösung zu Aufgabe 6: (a)** Sei $\mathscr{A}(A) = \{p \in K[x] \mid p(A) = 0\}$. Das Minimalpolynom $m \in K[x]$ von $A$ ist der eindeutig bestimmte normierte Erzeuger von $\mathscr{A}(A)$, d. h. $\mathscr{A}(A) = mK[x] = \{mf \mid f \in K[x]\}$.

Alternativ: Definiere das charakteristische Polynom von $A$ durch $\det(A - xI)$ und das Minimalpolynom als den minimalen normierten Teiler vom charakteristischen Polynom.

**(b)** Wir suchen eine Matrix $P$, deren Spalten aus Jordanketten bestehen. Char.Pol.$(A)(x) = (x+1)^3$.
Der einzige Eigenwert ist also $-1$. Eigenvektoren zu $-1$; bringe $(A+I)$ in reduzierte Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Dies gibt uns die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir bemerken, dass der Kern von $(A+I)^2$ ganz $\mathbb{R}^3$ ist, da $(A+I)^2 = 0$. Daher wähle einen beliebigen Vektor linear unabhängig von den Eigenvektoren, zum Beispiel $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechne $(A+I)w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Setze also $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und erhalte eine Basis aus Jordanketten $\{w_1, w_2, v_1\}$ der Längen 2 und 1. Damit ist die jordansche Normalform
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
und die Matrix
$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Seite 2 zu Aufgabe 6**

**(c)** Die jordanschen Normalformen, die infrage kommen, sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese korrespondieren jeweils zu den möglichen Minimalpolynomen (die die gleichen Linearfaktoren wie das charakteristische Polynom haben müssen) $(X-1)(X+2)$, $(X-1)^2(X+2)$, $(X-1)^3(X+2)$. Die Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen sind die Nullstellen vom Minimalpolynom. Die algebraische Vielfachheit gibt die größte Jordanzelle bezüglich des Eigenwertes an.

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 6**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

## Seite 4 zu Aufgabe 6

**Matrikelnummer:** **Seite 1 zu Aufgabe 7**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

**Aufgabe 7 (10 Punkte).**
Seien $K$ ein Körper ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) und $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum mit innerem Produkt $(.|.)$.

(a) (2 Punkte) Sei $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $V$. Beschreiben Sie ein Verfahren, durch das $\mathscr{B}$ in eine orthonormale Basis von $V$ überführt wird.

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) := \det \begin{pmatrix} 2a & d \\ -b & c \end{pmatrix}$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Finden Sie eine orthonormale Basis $\{w_1, w_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ bezüglich dieses inneren Produktes mit der Eigenschaft, dass

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| w_2 \right) = 0.$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right) := \det \begin{pmatrix} a & f & 1 \\ b & e & 1 \\ c & d & 1 \end{pmatrix}$$

kein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

*Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, solange Sie diese klar benennen.*

**Lösung zu Aufgabe 7: (a)** Gram–Schmidt-Verfahren: Setze $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Sei $\{w_1, \ldots, w_r\}$ bereits orthonormal. Setze $z_{r+1} := v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (v_{r+1} \mid w_i) w_i$ und $w_{r+1} = \frac{z_{r+1}}{\|z_{r+1}\|}$.

**(b)** Seien $a, b, a', b', c, d, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.

$\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = 2ac + bd.$

Symmetrie: $\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = 2ac + bd = 2ca + db = \left( \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right).$

Linearität: $\left( \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda' \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda' a' \\ \lambda b + \lambda' b' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = 2(\lambda a + \lambda' a')c + (\lambda b + \lambda' b')d = \lambda(2ac + bd) + \lambda'(2a'c + b'd) = \lambda \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) + \lambda' \left( \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right).$

Positive Definitheit: $\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = 2a^2 + b^2 \geq 0$, und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0.$

**Seite 2 zu Aufgabe 7**

Wir wenden das Gram–Schmidt-Verfahren auf die Basis $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ an. Dieses gibt uns die gesuchte orthonormale Basis.

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

$z_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{9}+\frac{4}{9}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

Alternativ: Finde zunächst einen Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, der orthogonal zu und linear unabhängig von $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist. Dieser muss also erfüllen $2a+b=0$. Wähle also zum Beispiel $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Normiere nun diese Vektoren und erhalte:

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2+1}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2+4}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

**(c)** Es gilt keine positive Definitheit:

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = 0.$$

**Matrikelnummer:** **Seite 3 zu Aufgabe 7**

**erreichte Punktzahl:** **Korrektor (Initialen):**

## Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

## Seite 4 zu Aufgabe 7