Zusatzübungen

(Lösungen am Ende)

Aufgabe 1:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechne alle Produkte zweier oben genannten Matrizen, die möglich sind (also $A \cdot B$, $B \cdot A$, $C \cdot B$,..., usw., wenn möglich).

Aufgabe 2:

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechne das Skalarprodukt $v \cdot w$ und die Norm $|v|$.

Aufgabe 3:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Berechne die Determinante von A.

Aufgabe 4:

$f(x)$ sei eine allgemeine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, wobei folgende Werte bekannt sind: $f(1) = 4$, $f(3) = 0$, $f(4) = -5$. Bestimme daraus die Werte a,b,c (z.B. mit einem linearen Gleichungssystem).

Aufgabe 5:

a) Berechne $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x} + \frac{3}{x})$

b) $f(x) = \frac{2x^3+5x-4}{(x-3)^2}$

Berechne $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Aufgabe 6:

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{24x} & x < 6 \\ x^2 - 4x & x \geq 6 \end{cases}$

Überprüfe, ob f stetig an der Stelle $x = 6$ ist.

Aufgabe 7:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + c & x \leq 1 \\ 8x & x > 1 \end{cases}$$

Bestimme c so, dass f stetig an der Stelle $x = 1$ ist.

Aufgabe 8:
Berechne die Ableitung f' von $f(x) = \frac{2x-5}{\sqrt{x}}$.

Aufgabe 9:
Finde alle möglichen Extremstellen von $f(x) = e^{2x} \cdot (2x+4)$.

Aufgabe 10:
Sei $f(x) = 3x^{-\frac{1}{2}}$. Berechne $\int\limits_4^9 f(x)dx$.

Aufgabe 11:
Berechne die Stammfunktionen folgender Funktionen:
a) $f(x) = e^{3x} + 4x$
b) $g(x) = \cos(2x)$
c) $h(x) = 4x \cdot \left(x^2+1\right)^3$
Versuche die Stammfunktion bei c) ohne auszuklammern herauszufinden (also auf direktem Weg).

Aufgabe 12:
Sei $f(x,y) = e^{3xy} + 7x^2 - \frac{4}{y^2}$.
Berechne die partiellen Ableitungen von f.

Aufgabe 13:
Ein Anleger hat auf einem Konto, auf dem die Zinsen halbjährlich gutgeschrieben werden, 2000 Euro angelegt und nach 3 Jahren 2123 Euro erhalten. Wie hoch war der Zinssatz für dieses Konto?

Aufgabe 14:
$f(x,y) = e^{2x-4} \cdot y,\ g(x,y) = x^2 + y - 2$
a) f soll unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ optimiert werden. Stelle die Lagrange-Funktion $L_f(x,y,\lambda)$ für dieses Optimierungsroblem auf und berechne die partiellen Ableitungen von L_f.
b) (etwas schwerer) Setze nun die partiellen Ableitungen (richtige Ableitungen siehe Lösung von 14 a) am Ende) gleich Null und löse das Gleichungssystem nach x und y auf, um die möglichen Extremstellen zu bekommen. Beachte dabei die ähnliche Aufgabe aus Beispiel 1 im Skript. Löse also zuerst die zweite Gleichung nach λ auf.

Aufgabe 15:
Klausuraufgabe Wirtschaftsmathematik Kurs WMS 13 A:
Ein Unternehmen stellt ein Gut G her und benötigt hierfür die beiden Produktionsfaktoren A (Arbeitsstunden) und M (Maschinenstunden). Die Anzahl der produzierten Einheiten von G in Abhängigkeit der eingesetzten Arbeits- und Maschinenstunden wird durch die Produktionsfunktion $P(A;M) = A \cdot M + M$ beschrieben. Jede Arbeitsstunde kostet das Unternehmen 16 Euro, jede Maschinenstunde 32 Euro. Das Unternehmen hat für die Produktion 240 Euro zur Verfügung. Berechnen Sie mit dem Lagrange-Verfahren, wie viele Einheiten von Gut G das Unternehmen unter Berücksichtigung der Kostenbeschränkung maximal produzieren kann.

Lösungen

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1:

Nur folgende 3 Matrixmultiplikationen sind möglich: $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot B$:

$A \cdot C = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -3 \\ 7 & 6 & 19 \end{pmatrix}$, $B \cdot B = \begin{pmatrix} 16 & -3 \\ -5 & 19 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

$v \cdot w = 0, \ |v| = \sqrt{6}$

Aufgabe 3:

$\det(A) = -74$

Aufgabe 4:

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

Aufgabe 5:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{-x} + \frac{3}{x}) = 0 + 0 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^3+5x-4}{(x-3)^2} = \infty, \ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3+5x-4}{(x-3)^2} = -\infty$

Aufgabe 6:

$f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 = 12$

$\lim\limits_{x \nearrow 6} f(x) = \sqrt{24 \cdot 6} = \sqrt{144} = 12$

Also ist f an der Stelle $x = 6$ stetig.

Aufgabe 7:

$f(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + c = 3 - 4 + c = c - 1$

$\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = 8 \cdot 1 = 8$

Damit f an der Stelle $x = 1$ stetig ist, muss $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = f(1)$ gelten, also muss $8 = c - 1$ sein, also $c = 9$.

Aufgabe 8:

$f(x) = \frac{2x-5}{\sqrt{x}} = \frac{2x-5}{x^{1/2}} = (2x-5) \cdot x^{-1/2}$

mit Quotientenregel: $f'(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x} - (2x-5) \cdot 0.5 x^{-1/2}}{x}$

mit Produktregel: $f'(x) = 2 \cdot x^{-1/2} + (2x-5) \cdot (-\frac{1}{2}) x^{-3/2}$

Aufgabe 9:
$f'(x) = 2e^{2x} \cdot (2x+4) + e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (2 \cdot (2x+4) + 2) = e^{2x} \cdot (4x+10)$
$f'(x) = 0$ nur für $x = -2.5$. Dies ist einzige mögliche Extremstelle.

Aufgabe 10:
$\int\limits_4^9 3x^{-1/2} dx = \left[6x^{1/2}\right]_4^9 = [6\sqrt{x}]_4^9 = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 2 = 18 - 12 = 6$

Aufgabe 11:
a) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + 2x^2$
b) $G(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$
c) $H(x) = 4x \cdot \frac{1}{4}\left(x^2+1\right)^4 \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^4$

Aufgabe 12:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y \cdot e^{3xy} + 14x$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x \cdot e^{3xy} + \frac{8}{y^3}$

Aufgabe 13:
Für unterjährige Verzinsung gilt folgende Formel: $K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$
In unserem Fall ist $K_t = 2123$, $K_0 = 2000$, $m = 2$, $t = 3$.
Also gilt $2123 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^6$.
Diese Gleichung wird nach i aufgelöst und man erhält

$$i = 2 \cdot \left(\sqrt[6]{\frac{2123}{2000}} - 1\right) = 0{,}02.$$

Aufgabe 14:
a) $L_f(x,y,\lambda) = e^{2x-4} \cdot y + \lambda \cdot \left(x^2 + y - 3\right)$

$$\frac{\partial L_f}{\partial x} = 2 \cdot e^{2x-4} \cdot y + 2\lambda x$$
$$\frac{\partial L_f}{\partial y} = e^{2x-4} + \lambda$$
$$\frac{\partial L_f}{\partial \lambda} = x^2 - y - 2$$

b)

$$2 \cdot e^{2x-4} \cdot y + 2\lambda x = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$e^{2x-4} + \lambda = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$x^2 + y - 2 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Gleichung (II) kann nach λ aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} e^{2x-4} + \lambda &= 0 \\ \lambda &= -e^{2x-4} \end{aligned}$$

In Gleichung (I) eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} 2 \cdot e^{2x-4} \cdot y - 2e^{2x-4} \cdot x &= 0 \\ 2y \cdot e^{2x-4} - 2x \cdot e^{2x-4} &= 0 \\ e^{2x-4} \cdot (2y - 2x) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $2y - 2x = 0$. (Satz vom Nullprodukt, und da e^a immer größer Null ist.)
Also gilt $y = x$.
$y = x$ in Gleichung (III) eingesetzt ergibt

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Mitternachts- oder pq-Fprmel (oder Ausprobieren) ergibt dann $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.
Mit $y = x$ gibt es somit folgende 2 mögliche Extremstellen: $(-2 \mid -2)$ und $(1 \mid 1)$

Ausführliche Lösung zur Übungsaufgabe 15
Bemerkung:
Diese Lösung ist zum optimalen Verständnis und zum guten Nachvollziehen recht ausführlich, mit viel Text und Erklärungen. Im Falle einer Lösung für die Klausur müssen einzelne Schritte natürlich nicht erläutert werden, es genügen die Gleichungen und Rechnungen.

Wir haben zwei relevante Funktionen, einmal die Produktionsfunktion $P(A,M)$ und einmal die Kostenfunktion $C(A,M)$.

$$\begin{aligned} P(A,M) &= A \cdot M + M \\ C(A,M) &= 16 \cdot A + 32 \cdot M \end{aligned}$$

Wir müssen überlegen, welche Funktion optimiert werden soll und welche Funktion eine Nebenbedingung darstellt. Dies wird aber aus dem Text deutlich. Die Produktionsmenge (also P) soll maximiert werden, während die Ausgaben (also C) fest (nämlich 240 Euro)

sind.
Wir haben also folgende Nebenbedingung: $C(A,M) = 240$, also

$$16 \cdot A + 32 \cdot M = 240 \tag{NB}$$

und als Nullbedingung geschrieben

$$16 \cdot A + 32 \cdot M - 240 = 0. \tag{NB}$$

Deshalb lautet die Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} L(A,M,\lambda) &= P(A,M) + \lambda \cdot (16 \cdot A + 32 \cdot M - 240) \\ L(A,M,\lambda) &= A \cdot M + M + \lambda \cdot (16 \cdot A + 32 \cdot M - 240). \end{aligned}$$

Um das Optimum zu finden, müssen wir jetzt nur noch den Gradient von L berechnen und gleich Null setzen und dann nach den einzelnen Variablen auflösen.

$$\frac{\partial L}{\partial A} = M + \lambda \cdot 16 \qquad = 0 \tag{I}$$

$$\frac{\partial L}{\partial M} = A + 1 + \lambda \cdot 32 \qquad = 0 \tag{II}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 16 \cdot A + 32 \cdot M - 240 \qquad = 0 \tag{III}$$

(I) aufgelöst nach λ ergibt $\lambda = -\frac{1}{16}M$.
Eingesetzt in (II) ergibt das

$$\begin{aligned} A + 1 - \frac{1}{16}M \cdot 32 &= 0 \\ A + 1 - 2 \cdot M &= 0. \end{aligned}$$

Nach A auflösen:

$$A = 2 \cdot M - 1 \tag{*}$$

und in (III) einsetzen:

$$\begin{aligned} 16 \cdot (2M - 1) + 32 \cdot M - 240 &= 0 \\ 32 \cdot M - 16 + 32 \cdot M - 240 &= 0 \\ 64 \cdot M - 256 &= 0 \\ 64 \cdot M &= 256 \\ M &= 4 \end{aligned}$$

In (*) eingesetzt ergibt das $A = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ und man hat die optimale Aufteilung in Arbeits- und Maschinenstunden gefunden ($A = 7$, $M = 4$). Um die maximale Produktionsmenge zu bekommen, muss man dies nur noch in $P(A,M)$ einsetzen:

$$P(7,4) = 7 \cdot 4 + 4 = 32.$$

Das Unternehmen kann unter der Bedingung, dass es nur 240 Euro zur Verfügung hat, also maximal 32 Einheiten von Gut G herstellen.