HTWG Konstanz Dr. Lothar Sebastian Krapp
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
05. Februar 2020 Wintersemester 2019/2020

Klausur: Mathematik 1 (EIB)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ	Note
erreichte Punktzahl									
Maximalpunktzahl	10	10	10	10	10	10	10	60	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Testbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Sie können so viele Aufgaben bearbeiten, wie Sie möchten. Die **besten 6 Aufgaben** werden gewertet.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden, solange Sie diese klar benennen.
5. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
6. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
7. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
8. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
9. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art in der Hand.
10. Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 1 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Seien

$$z_1 = 1 + \mathrm{j} \text{ und } z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}.$$

Berechnen Sie $\overline{z_2}$, $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1^2}{2}$.

(Stellen Sie Ihr Ergebnis jeweils in einer Form Ihrer Wahl aus der Vorlesung dar. Sie können für jedes der drei Ergebnisse frei wählen.)

(b) Seien $p_1(z) = z^3 - z^2 + 2$ und $p_2(z) = z^2 - 2\mathrm{j}$.

(i) (2 Punkte) Berechnen Sie $p_1(1+\mathrm{j})$ und $p_2(1+\mathrm{j})$.

(ii) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Linearfaktordarstellung von

$$p(z) = \left(z^3 - z^2 + 2\right) \cdot \left(z^2 - 2\mathrm{j}\right).$$

(c) (2 Punkte) Ermitteln Sie die Überlagerung $y(t) = A\sin(t + \varphi)$ der Schwingungen

$$y_1(t) = \sin(t) \text{ und } y_2(t) = \sqrt{3}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right).$$

(Sie dürfen $\arg\left(1 + \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ *verwenden.)*

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 4 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 2 (10 Punkte). Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats.

(b) (3 Punkte) Berechen Sie den Faktor $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\vec{a} + k\vec{b}$ senkrecht auf dem Vektor $\vec{a}$ steht.

(c) (3 Punkte) Liegen die Punkte $A = (3|10|1)$, $B = (0|1|1)$, $C = (-1|0|2)$ und $D = (-3|-2|4)$ in einer Ebene? Begründen Sie Ihre Antwort!

(d) (2 Punkte) Finden Sie einen normierten Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (d.h. $|\vec{v}| = 1$), der in einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ zu $\vec{b}$ steht.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 4 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle möglichen Produkte der folgenden reellwertigen Matrizen:

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$,

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$.

(b) (5 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 12 \\ -x_1 + ax_2 - 2x_3 &= -9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Ist das lineare Gleichungssystem für $a = -1$ und für $a = -2$ jeweils **eindeutig** lösbar? Falls ja, finden Sie alle Lösungen.

(c) (2 Punkte) Finden Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$$

die $M^{\mathrm{T}} = M$ und $M \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 4 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 4 (10 Punkte). Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) (2 Punkte) Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A? Falls ja, dann geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A und alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Inverse von $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{R})$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 2 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 4 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 5 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Geben Sie je ein Beispiel für eine Zahlenfolge an, die

(i) streng monoton wächst und den Grenzwert -12 hat.

(ii) streng monoton fällt und nach unten unbeschränkt ist.

(b) (3 Punkte) Sind folgende Folgen konvergent? Falls ja, berechnen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(i)
$$a_n = \frac{n^2}{n(2n+2)^2 - 4n^3}$$

(ii)
$$b_n = \left(\frac{n^2 - 4n + 4}{4n^3}\right)^{-2}$$

(c) (3 Punkte) Sind folgende Reihen konvergent? Falls ja, berechnen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(i)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k+1}}$$

(ii)
$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{n-1}$$

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die geometrische Reihe, die den Grenzwert $4,5$ hat.

Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 2 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 4 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 6 (10 Punkte). Seien $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$ und $g(x) = \frac{1}{x^3+1}$.

(a) (2 Punkte) Finden Sie mittels einer geeigneten Substitution eine Stammfunktion F von f.

(b) (5 Punkte) Finden Sie die Taylorreihen von g und von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Was ist ihr Konvergenzradius?

(c) (3 Punkte) Finden Sie die Taylorreihe von $h(x) = \frac{1}{3}\ln\left(\left|x^3+1\right|\right)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 2 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 4 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 7 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Lösen Sie folgendes bestimmtes Integral:

$$\int_0^1 \sqrt[5]{x^6}\, \mathrm{d}x.$$

(b) (6 Punkte) Lösen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^3 - x^2 - 3x + 12}{x^2 + x - 6}\, \mathrm{d}x.$$

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das Kurvenstück

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

für $3 \leq x \leq 5$ um die y-Achse rotiert wird.

Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 2 zu Aufgabe 7

Matrikelnummer: **Seite 3 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl:

Fortsetzung der Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 4 zu Aufgabe 7