Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer
Semesterferien Frühjahr 2020

Zusatzübungsblatt zur Vorlesung Analysis I/II

Abgabe: Bis Dienstag, 14.04.2020, 9:50 Uhr, in den Briefkasten 13 bei F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Blatt.

Hinweis: Alle Punkte dieses Blattes sind Zusatzpunkte für die Analysis II Vorlesung im Sommersemester 2020.

Aufgabe 1: (Kompakte Mengen) (4 Punkte)
Seien K_1, K_2 disjunkte kompakte Mengen in einem metrischen Raum E, so können K_1 und K_2 durch offene Mengen getrennt werden, d. h. es gibt disjunkte offene Mengen $\Omega_i \subset E$, $i = 1, 2$, so dass

$$K_i \subset \Omega_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2$$

gilt. Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2: (Variation des Banachschen Fixpunktsatzes) (4 Punkte)
Sei E ein kompakter metrischer Raum. Sei $T : E \to E$ eine Abbildung und gelte

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

für alle $x \neq y \in E$.
Zeigen Sie, dass dann T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 3: (Endlich-dimensionale normierte Räume) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ paarweise äquivalent sind.
Anleitung: Sei $||\cdot||$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ eine feste Norm, z. B. die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass $||\cdot||$ auf dem Raum $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ stetig ist und betrachten Sie das Supremum und das Infimum von $||\cdot||$ auf der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Folgern Sie, dass $||\cdot||$ und $|\cdot|$ äquivalent sind.

Aufgabe 4: (Hausdorff-Metrik) (2+2+4+2+2+4 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller nichtleeren, kompakten Teilmengen von K und definiere für $\underline{X \in \mathcal{K}}$ und $\varepsilon > 0$

$$X_\varepsilon := \bigcup_{x \in X} (B_\varepsilon(x) \cap K) .$$

Definiere $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) := \inf\{\varepsilon > 0 : X \subset Y_\varepsilon \text{ und } Y \subset X_\varepsilon\} .$$

(i) Zeigen Sie, dass $d_{\mathcal{H}}$ eine Metrik auf $\mathcal{K}$ definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $d_{\mathcal{H}}$ äquivalent zur Metrik

$$\delta(X,Y) := \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} |x-y| + \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} |y-x|$$

ist. Warum betrachtet man nicht $\Delta(X,Y) := \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} |x-y|$?

(iii) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{K},\, d_{\mathcal{H}})$ vollständig ist. **(!)**

(iv) Betrachten Sie die Iterationen der *Koch-Kurve*, z. B. auf `wikipedia`. Bestimmen Sie die Länge der Kurve nach der n-ten Iteration, wenn die Länge anfangs gleich eins ist.

(v) Zeigen Sie, dass diese Iterationen bezüglich $d_{\mathcal{H}}$ konvergieren.

(vi) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ kompakt ist. **(!)**