

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 1

Abgabe von: Mein Name

Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis zum Ende von Kapitel 3 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.

Aufgabe 1.1 (Operatornorm)

[4 Punkte]

Seien E, F, G normierte \mathbb{K} -Vektorräume. Beweisen Sie:

- (i) $L(E, F)$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum. Mit der Operatornorm ist $L(E, F)$ ein normierter Raum.
- (ii) Ist F ein Banachraum, so ist $L(E, F)$ vollständig.
- (iii) Seien $A \in L(E, F)$ und $B \in L(F, G)$. Dann gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

Lösung:

Aufgabe 1.2 (Orthogonale Matrizen)

[2 + 2 + 2* + 2* + 2* + 4* Punkte]

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathbb{R}^{n \times n}$ die Menge aller reellen $(n \times n)$ -Matrizen, $GL(n)$ die Teilmenge aller invertierbaren Matrizen und $O(n)$ die Teilmenge aller orthogonalen Matrizen. Eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ sei durch

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

definiert.

Zeigen Sie:

- (i) Seien $A \in O(n)$ und v eine Spalte von A . Dann gilt $\|v\| = 1$.
- (ii) $O(n)$ ist kompakt.
- (iii)* Die Determinante $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ ist eine stetige Funktion.
(Sie dürfen, falls erwünscht, $n = 3$ annehmen.)
- (iv)* $GL(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ ist offen.
- (v)* Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist der Rang $\text{rk}: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \text{rk}(A)$ eine unterhalbstetige Funktion.
- (vi)* $O(n)$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.

(Zur Erinnerung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal, wenn $A^t A = I_n$ gilt. Hierbei bezeichnet I_n die n -dimensionale Einheitsmatrix und A^t die Transponierte von A .)

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 24. April 2020, 09:54 Uhr**, per E-Mail an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.