O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 1

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	Σ
4	14	18

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis zum Ende von Kapitel 3 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet.

Aufgabe 1.1 (Operatornorm) **[4 Punkte]**
Seien E, F, G normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Beweisen Sie:

(i) $L(E,F)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Mit der Operatornorm ist $L(E,F)$ ein normierter Raum.

(ii) Ist F ein Banachraum, so ist $L(E,F)$ vollständig.

(iii) Seien $A \in L(E,F)$ und $B \in L(F,G)$. Dann gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

Lösung:

(i) Wir zeigen, dass $L(E,F)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$-Vektorraums aller linearen Abbildungen von E nach F ist. Der Nulloperator $x \mapsto 0$ ist in $L(E,F)$ enthalten. Für $A, B \in L(E,F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sind sowohl $A + B\colon x \mapsto Ax + Bx$ als auch $\lambda A\colon x \mapsto \lambda Ax$ stetige lineare Abbildungen. Damit ist $L(E,F)$ unter Addition und Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen. Wir zeigen nun, dass $L(E,F)$ ein normierter Raum ist:

- Positivität: $\|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq 0$ für alle $x \in E$.
- Definitheit: Falls $\|A\| = 0$, dann $0 = \|A\| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ und daher $\|Ax\| = 0$ für alle $x \in E$ mit $x \neq 0$. Es folgt $Ax = 0$ für alle $x \in E$ mit $x \neq 0$ und schließlich $A \equiv 0$, d.h. A ist der Nulloperator.
- Homogenität:
$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \|A\|.$$
- Dreiecksungleichung:
$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|+\|Bx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|.\end{aligned}$$

(ii)
- Sei $(T_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L(E,F)$ und sei $u \in E$. Wir definieren T durch $Tu := \lim_{n\to\infty} T_n u$. Der Grenzwert existiert, da $(T_n u)_n$ eine Cauchyfolge in F ist; es gilt nämlich $\|T_n u - T_m u\| = \|(T_n - T_m)u\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|$. Da F vollständig ist, ist T wohldefiniert. $T\colon E \to F$ ist linear, denn es gilt

  $$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n x + \mu T_n y) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n x + \mu \lim_{n\to\infty} T_n y = \lambda Tx + \mu Ty \end{aligned}$$

  für $x, y \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- T ist stetig: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq M$ gilt $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir für alle $m, n \geq M$: $|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Damit ist $(\|T_n\|)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert somit gegen ein $c \in \mathbb{R}$. Da $L(E,F)$ ein normierter Raum ist, ist die Normfunktion stetig. Daraus folgt, dass für alle $x \in E$ gilt:

  $$\|Tx\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n x\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\| = c \, \|x\| \, .$$

  Daraus folgt die Stetigkeit von T.
- $T_n \to T$ in $L(E,F)$: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \geq M$ gilt $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Aus der Definition der Operatornorm folgt, dass für alle $u \in E$ mit $\|u\| = 1$ und alle $n, m \geq M$ gilt:

  $$\|T_n u - T_m u\| < \varepsilon.$$

  Sei $u \in E$ mit $\|u\| = 1$ und sei $n \geq M$. Wir erhalten aufgrund der Stetigkeit der Normfunktion

  $$\|T_n u - Tu\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n u - T_m u\| \leq \varepsilon.$$

  Insgesamt erhalten wir also für alle $n \geq M$:

  $$\|T_n - T\| = \sup_{u\in E, \|u\|=1} \|T_n u - Tu\| \leq \varepsilon,$$

  wie gewünscht.

(iii) Für eine bessere übersicht bezeichnen wir die Operatornormen auf $L(E,F)$, $L(F,G)$ und $L(E,G)$ mit $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ bzw. $\|\cdot\|_{L(F,G)}$ bzw. $\|\cdot\|_{L(E,G)}$.
Aus der Definition der Operatornorm

$$\|A\|_{L(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

folgt $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|_{L(E,F)}$ und daher $\|Ax\| \leq \|A\|_{L(E,F)} \cdot \|x\|$ für alle $x \in E$. Für B gilt analog $\|By\| \leq \|B\|_{L(F,G)} \cdot \|y\|$ für alle $y \in F$. Deswegen erhalten wir

$$\|(B \circ A)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\|_{L(F,G)} \cdot \|Ax\| \leq \|B\|_{L(F,G)} \cdot \|A\|_{L(E,F)} \cdot \|x\|$$

und

$$\frac{\|(B \circ A)x\|}{\|x\|} \leq \|B\|_{L(F,G)} \cdot \|A\|_{L(E,F)}$$

für alle $x \in E$. Schließlich ist

$$\|B \circ A\|_{L(E,G)} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|(B \circ A)x\|}{\|x\|} \leq |B\|_{L(F,G)} \cdot \|A\|_{L(E,F)}.$$

Aufgabe 1.2 (Orthogonale Matrizen) **[2 + 2 + 2* + 2* + 2* + 4* Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathbb{R}^{n\times n}$ die Menge aller reellen $(n \times n)$-Matrizen, $\mathrm{GL}(n)$ die Teilmenge aller invertierbaren Matrizen und $O(n)$ die Teilmenge aller orthogonalen Matrizen. Eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ sei durch

$$\|A\| := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

definiert.
Zeigen Sie:

(i) Seien $A \in O(n)$ und v eine Spalte von A. Dann gilt $\|v\| = 1$.

(ii) $O(n)$ ist kompakt.

(iii)* Die Determinante $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$ ist eine stetige Funktion.
(Sie dürfen, falls erwünscht, $n = 3$ annehmen.)

(iv)* $\mathrm{GL}(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist offen.

(v)* Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist der Rang $\mathrm{rk}\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{rk}(A)$ eine unterhalbstetige Funktion.

(vi)* $O(n)$ besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten.

(Zur Erinnerung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, wenn $A^tA = I_n$ gilt. Hierbei bezeichnet I_n die n-dimensionale Einheitsmatrix und A^t die Transponierte von A.)

Lösung:

(i) Seien $A = (a^i_j)_{1\leq i,j\leq n} \in O(n)$ und

$$A^t = \left((a^t)^i_j\right)_{1\leq i,j\leq n} = \left(a^j_i\right)_{1\leq j,i\leq n}$$

die transponierte von A. Ferner seien $k \in \{1, \dots, n\}$ fest und

$$v = \begin{pmatrix} a^1_k \\ a^2_k \\ \dots \\ a^n_k \end{pmatrix}$$

die k-te Spalte von A. Aus $A^tA = I_n$ folgt dann

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a^i_k \cdot a^i_k = \sum_{i=1}^{n} (a^t)^k_i \cdot a^i_k = \delta^k_k = 1.$$

Hierbei bezeichnet δ^i_j das Kronecker-Delta

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j; \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Daher ist $\|v\| = 1$.

(ii) Wir identifizieren zunächst den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{n^2}$, indem wir eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf den Vektor

$$v_A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

abbilden. Hierbei bezeichnet a_j für $j \in \{1, \dots, n\}$ die j-te Spalte von A. Da alle Normen auf $\mathbb{R}^{n^2}$ äquivalent sind (siehe Zusatzblatt zur Analysis I/II, Aufgabe 3), genügt es nach dem Satz von Heine–Borel zu zeigen, dass $O(n)$ beschränkt und abgeschlossen ist.

Sei $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n} \in O(n)$.
Beschränkheit: Teilaufgabe (i) impliziert $\|a_j\| = 1$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Daraus folgt $\|v_A\|^2 = \|a_1\|^1 + \ldots + \|a_n\|^2 = n$. Bezüglich der euklidischen Norm ist $O(n)$ (als Unterraum von $\mathbb{R}^{n^2}$) also beschränkt.
Abgeschlossenheit: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^{n\times n} &\to \mathbb{R}^{n\times n} \\ A &\mapsto A^t A. \end{aligned}$$

Sie ist stetig (und als topologische Abbildung stetig), da jeder Eintrag von A^tA eine polynomiale Funktion in den Einträgen von A ist: Nach der Definition vom Produkt zweier Matrizen ist f schlicht die Komposition von Summen und Produkten. Weiterhin gilt $O(n) = f^{-1}(\{I_n\})$. Da $\{I_n\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ als endliche Menge abgeschlossen ist (Bemerkung 3.6 (iv)), ist $O(n)$ abgeschlossen.

(iii) Aus der Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}$$

sieht man, dass die Determinante eine polynomiale Funktion in den Einträgen von A und deshalb stetig ist.

Ebenso kann man mit der Definition der Determinante über die Entwicklung nach Zeilen oder Spalten induktiv argumentieren.

(iv) Die Determinante ist stetig und $\mathrm{GL}(n)$ ist das Urbild der offenen Teilmenge $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ von $\mathbb{R}$ unter dieser Abbildung.

(v) Wie in Aufgabenteil (ii) identifizieren wir $\mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\mathbb{R}^{nm}$ und können so auf $\mathbb{R}^{n\times m}$ die euklidische Norm

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \|a_j\|^2}$$

verwenden.

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $A = (a^i_j)_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, sodass $A \in \mathrm{rk}^{-1}((a, \infty))$. Wir setzen $r = \mathrm{rk}(A) > a$. Dann existieren $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, m\}$, sodass die Spalten $j_1, \dots, j_r$ linear unabhängig sind. Darum gibt es eine Untermatrix

$$M = \begin{pmatrix} a^{i_1}_{j_1} & \dots & a^{i_1}_{j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} & \dots & a^{i_r}_{j_r} \end{pmatrix}$$

von A mit $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, n\}$, deren Determinante nicht verschwindet. Seien $j_{r+1}, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, m\}$ und $i_{r+1}, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$, sodass A genau die Einträge

$$\left\{a^{i_\ell}_{j_k} : 1 \leq \ell \leq n, 1 \leq k \leq m\right\}$$

hat. (Sprich: $a^{i_1}, \ldots, a^{i_n}$ sind die Zeilen von A und $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ sind die Spalten von A.) Aus der Teilaufgabe (iii) wissen wir, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \det \colon \mathbb{R}^{r \times r} &\to \mathbb{R} \\ M &\mapsto \det(M), \end{aligned}$$

stetig ist. Darum existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\det(C) \neq 0$ für alle $C \in B_\varepsilon(M)$. (Hierbei nehmen wir $B_\varepsilon(C)$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^{k^2}$). Für Matrizen $C \in B_\varepsilon(M)$ gilt also $\operatorname{rk}(C) = r$.

Sei nun $D \in B_\varepsilon(A)$ beliebig. Dann hat D eine Untermatrix M' von der Form

$$M' = \begin{pmatrix} a^{i_1}_{j_1} + \beta^{i_1}_{j_1} & \ldots & a^{i_1}_{j_r} + \beta^{i_1}_{j_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{i_r}_{j_1} + \beta^{i_1}_{j_1} & \ldots & a^{i_r}_{j_r} + \beta^{i_1}_{j_1} \end{pmatrix},$$

wobei $\|M' - M\| \leq \|D - A\| < \varepsilon$. Es folgt $r = \operatorname{rk}(M') \leq \operatorname{rk}(D)$. Da D beliebig war, gilt also $B_\varepsilon(A) \subset \operatorname{rk}^{-1}((a, \infty))$. Folglich ist $\operatorname{rk}^{-1}((a, \infty))$ offen und der Rang ist eine unterhalbstetige Funktion (nach Plenumsübung).

(vi) Aus $AA^t = A^tA = I_n$ folgt $\det(A) \cdot \det(A^t) = \det^2(A) = 1$ und darum $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$ für alle $A \in O(n)$. Die Determinante bildet $O(n)$ auf die nicht zusammenhängende Menge $\{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ ab und ist nicht konstant, weil es z.B. $I_n, J_n \in O(n)$ (wobei wir J_n erhalten, indem wir die erste Zeile von I_n mit -1 multiplizieren) und $\det(I_n) = 1$ und $\det(I_n) = -1$ gilt. Also ist $O(n)$ nicht zusammenhängend (wegen (iii) und Theorem 3.75). Damit besteht $O(n)$ aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten.

Seien $SO(n) := \{A \in O(n) \colon \det(A) = 1\}$ und $O(n)^- := \{A \in O(n) \colon \det(A) = -1\}$. Beweisidee für den Wegzusammenhang: Man multipliziere die Matrix $A \in SO(n)$ mit Drehmatrizen $B_1, \ldots, B_n \in O(n)$, sodass

$$B_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a^1_2 & a^1_3 & \ldots & a^1_n \\ 0 & a^2_2 & a^2_3 & & \vdots \\ \vdots & a^3_2 & a^3_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a^n_2 & a^n_3 & \ldots & a^n_n, \end{pmatrix}, B_2 \cdot B_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^1_3 & \ldots & a^1_n \\ 0 & 1 & a^2_3 & & \vdots \\ \vdots & 0 & a^3_3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^n_3 & \ldots & a^n_n \end{pmatrix}, \ldots$$

und schließlich $B_n \cdots B_1 \cdot A = I_n$. Damit wird jede Matrix in $SO(n)$ mit der Einheitsmatrix I_n verbunden.

Da die Multiplikation mit der Diagonalmatrix J_n einen Homöomorphismus von $SO(n)$ mit seinem Komplement $O(n)^-$ in der $O(n)$ liefert, ist auch Letzteres zusammenhängend.

Abgabe: Bis **Freitag, 24. April 2020, 09:54 Uhr**, per E-Mail an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.