O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 2

1	2	3	4	Σ

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Korollar 4.32 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets hinreichend zu beweisen.

Aufgabe 2.1 (Differenzenquotienten) **[4 Punkte]**
Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Definiere die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x \cdot g(x)$.
Unter welchen der jeweiligen Annahmen an g ist f im Punkt 0 differenzierbar?

(i) $g(0) = 0$ und g ist beschränkt.

(ii) g ist in 0 stetig.

(iii) g ist in 0 stetig und es gilt $g(0) = 0$.

(iv) $g(x) = o(1)$ für $x_0 = 0$.

(v) Es gibt ein $a > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|g(x)| \leq |x|^a$.

Lösung:

Aufgabe 2.2 (Konvergenz gegen Tangente) **[1 + 2 + 1 Punkte]**
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definiere für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $T, S_\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $T((x,y)^t) := (x - x_0, y - f(x_0))^t$ und $S_\lambda((x,y)^t) := \lambda(x,y)^t$.

(a) Sei $\lambda > 0$. Finden Sie eine Abbildung $h_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die graph $h_\lambda = S_\lambda(T(\text{graph } f))$ erfüllt.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) f ist in x_0 differenzierbar mit $a = f'(x_0)$.

  (ii) Für jede Menge $\Omega = [-k, k]$ mit $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Funktionenfolge $(g_n)_{n>0}$ gegeben durch $g_n = h_n|_\Omega$ gleichmäßig für $n \to \infty$ gegen das Geradenstück $g\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$.

(c) Seien $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ und $\Omega = [-2, 2]$. Zeichnen Sie die Graphen von g_1, g_2, g_3 und g.
(Sie können Ihre Zeichnung auch als separates Foto abgeben.)

Lösung:

Aufgabe 2.3 (Lineare Approximation) **[2 Punkte]**
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und $g(x) \in o(|x - x_0|)$ mit $f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + g(x)$.

Lösung:

Aufgabe 2.4 (Mittelwertsatz) **[2 + 2 + 2 + 2* Punkte]**

(i) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Sei ferner $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $\|f'(x)\| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig mit Konstante L ist, d. h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot |x - y|$.

(ii) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung mit $g'(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $g(a) \geq g(0) + a$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(iii) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine differenzierbare Abbildung mit $h'(x) = a \cdot h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x > x_0$ gilt: $h(x) \geq x^2$.

(iv)* Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Aussage in (iii) für x^n anstelle von x^2.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Funktion $e(x) = h(0)^{-1}h(a^{-1}x)$.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, 30. April 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.