O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 2

1	2	3	4	Σ
4	4	2	8	18

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Bester Lieblingstutor
Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Korollar 4.32 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets hinreichend zu beweisen.

Aufgabe 2.1 (Differenzenquotienten) **[4 Punkte]**
Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Definiere die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x \cdot g(x)$.
Unter welchen der jeweiligen Annahmen an g ist f im Punkt 0 differenzierbar?

(i) $g(0) = 0$ und g ist beschränkt.

(ii) g ist in 0 stetig.

(iii) g ist in 0 stetig und es gilt $g(0) = 0$.

(iv) $g(x) = o(1)$ für $x_0 = 0$.

(v) Es gibt ein $a > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|g(x)| \le |x|^a$.

Lösung:

(i) f ist im Allgemeinen nicht in 0 differenzierbar.

Betrachte

$$g(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < x < 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f(x) = |x|$ für $-1 < x < 1$. Bestimme nun den Differenzenquotienten für eine streng monoton fallende und eine streng monoton wachsende Nullfolge, $\frac{1}{n}$ bzw. $-\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{\frac{1}{n} - 0} = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(-\frac{1}{n}\right) - f(0)}{-\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - 0}{-\frac{1}{n} - 0} = -1.$$

Da die Grenzwerte nicht übereinstimmen, ist f in 0 nicht differenzierbar.

(ii) f ist in 0 differenzierbar:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot g(x) - 0 \cdot g(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} g(x) \\ &= g(0). \end{aligned}$$

(iii) f ist in 0 differenzierbar: Dies folgt direkt aus (ii).

(iv) f ist in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$: Ist $g(x) \in o(1)$, so gilt $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Also folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot g(x) - 0 \cdot g(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} g(x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

(v) f ist in 0 differenzierbar: Wegen $|g(x)| \leq |x|^a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x)| = |x \cdot g(x)| \leq |x|^{a+1}.$$

Daher gilt $f(0) = 0$. Es folgt

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq |x|^a \to 0 \quad \text{für } x \to 0,$$

da $a > 0$. Insbesondere gilt $f'(0) = 0$.

Aufgabe 2.2 (Konvergenz gegen Tangente) **[1 + 2 + 1 Punkte]**
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definiere für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abbildungen $T, S_\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $T((x,y)^t) := (x - x_0, y - f(x_0))^t$ und $S_\lambda((x,y)^t) := \lambda(x,y)^t$.

(a) Sei $\lambda > 0$. Finden Sie eine Abbildung $h_\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die graph $h_\lambda = S_\lambda(T(\text{graph } f))$ erfüllt.

(b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) f ist in x_0 differenzierbar mit $a = f'(x_0)$.

  (ii) Für jede Menge $\Omega = [-k, k]$ mit $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Funktionenfolge $(g_n)_{n>0}$ gegeben durch $g_n = h_n|_\Omega$ gleichmäßig für $n \to \infty$ gegen das Geradenstück $g\colon \Omega \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$.

(c) Seien $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$ und $\Omega = [-2, 2]$. Zeichnen Sie die Graphen von g_1, g_2, g_3 und g.

(Sie können Ihre Zeichnung auch als separates Foto abgeben.)

Lösung:

(a) Man bemerke: T ist die Translationsabbildung, die jeden Punkt in $\mathbb{R}^2$ um x_0 nach links und $f(x_0)$ nach unten verschiebt. Insbesondere bildet T den Punkt $(x_0, f(x_0))^t$ auf den Ursprung ab. Die Abbildung S_λ streckt jeden Vektor in $\mathbb{R}^2$ um den Faktor λ.

Sei

$$h_\lambda(x) = \lambda \cdot \left(f\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) - f(x_0)\right).$$

Für diese Funktion gilt:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{graph } h_\lambda \Leftrightarrow h_\lambda(x) = y & \\
&\Leftrightarrow \lambda \cdot \left(f\left(\frac{x}{\lambda} + x_0 \right) - f(x_0) \right) = y \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} + x_0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} + x_0 \\ \lambda \cdot (f(\frac{x}{\lambda} + x_0) - f(x_0)) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} + x_0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \lambda(f(u) - f(x_0)) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u - x_0 \\ f(u) - f(x_0) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S_\lambda\left(T \begin{pmatrix} u \\ f(u) \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S_\lambda(T(\text{graph} f))
\end{aligned}
$$

Daraus folgt graph $h_\lambda = S_\lambda(T(\text{graph} f))$.

(b) **(i)⇒(ii):** Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Aussage ist klar für $k = 0$, da $g_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir nehmen also $k > 0$ an. Mit den Ableitungsregeln erhalten wir

$$h_n'(x) = f'\left(\frac{x}{n} + x_0 \right).$$

Insbesondere gilt also

$$g_n'(0) = h_n'(0) = f'(x_0) = a$$

für alle $n > 0$.

Nach Proposition 4.6 gibt es eine Funktion $r(x) \in o(|x|)$ mit

$$g_1(x) = ax + r(x).$$

Weiterhin ist r in 0 stetig, da g_1 in 0 differenzierbar und daher stetig ist. Sei also $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$ die Funktion r im Intervall $[-\frac{k}{n}, \frac{k}{n}]$ stetig ist. Wir wählen für alle $n > N$ ein $x_n \in [-\frac{k}{n}, \frac{k}{n}]$, sodass

$$|r(x_n)| = \sup_{|x| \leq \frac{k}{n}} |r(x)|.$$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
\sup_{|x| \leq k} |g_n(x) - g(x)| &= \sup_{|x| \leq k} \left| n g_1\left(\frac{x}{n} \right) - ax \right| \\
&= \sup_{|x| \leq k} \left| n r\left(\frac{x}{n} \right) \right| \\
&= \sup_{|x| \leq \frac{k}{n}} |n r(x)| \\
&= n|r(x_n)|. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Da $|x_n| < \frac{k}{n}$, erhalten wir

$$\frac{|r(x_n)|}{|x_n|} > \frac{n|r(x_n)|}{k}$$

für alle $n > N$.

Da $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$ und $r(x) \in o(|x|)$, folgt daraus

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{|r(x_n)|}{|x_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n|r(x_n)|}{k},$$

also inbesondere $\lim_{n\to\infty}(n|r(x_n)|) = 0$. Dies zeigt mit (*), dass $(g_n)_{n>0}$ gleichmäßig gegen g kovergiert.

(ii)⇒(i): Wir setzen $k = 2$, also $\Omega = [-2, 2]$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $(g_n)_{n>0}$ gleichmäßig gegen g konvergiert, können wir $N \in \mathbb{N}$ wählen, sodass für alle $n > N$ und alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Sei $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \frac{1}{N}$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{|h|} \leq n \leq \frac{2}{|h|}$. Da dann $1 \leq n|h| \leq 2$, also $nh \in \Omega$, und $n > N$, folgt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g_1(h) - g_1(0)}{h} - a\right| &= \left|\frac{g_1(h)}{h} - a\right| \\
&= \left|\frac{g_n(nh)}{nh} - a\right| \\
&= \left|\frac{g_n(nh) - nha}{nh}\right| \\
&= \left|\frac{g_n(nh) - g(nh)}{nh}\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{n|h|} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $g_1'(0) = a$ und daher $f'(x_0) = g_1'(0) = a$ wie oben.

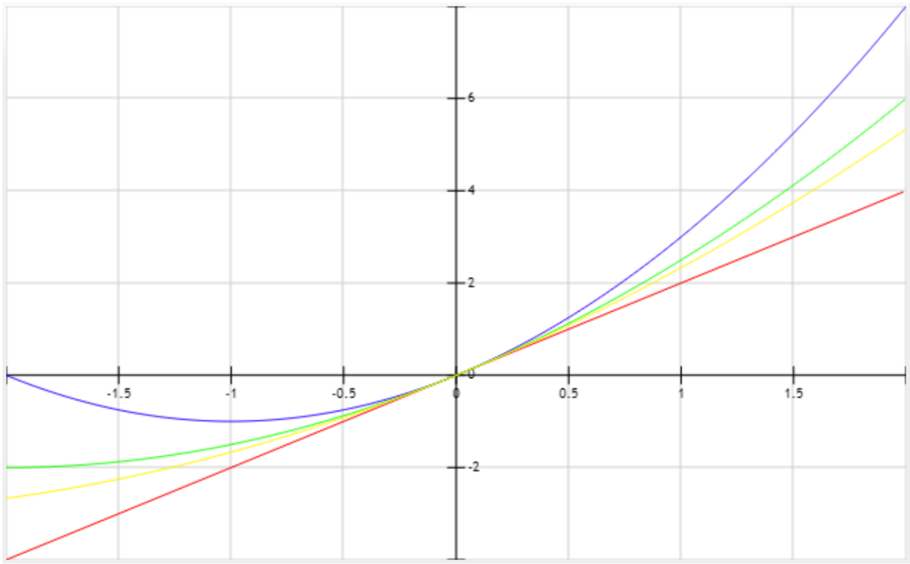
(c) $f(x) = x^2$, $\Omega = [-2, 2]$, $x_0 = 1$, $f'(1) = 2$, $g_n(x) = n((\frac{x}{n} + 1)^2 - 1) = x(\frac{x}{n} + 2)$.

$g(x) = 2x$

$g_1(x) = x(x + 2)$

$g_2(x) = x\left(\frac{x}{2} + 2\right)$

$g_3(x) = x\left(\frac{x}{3} + 2\right)$



Aufgabe 2.3 (Lineare Approximation) **[2 Punkte]**
Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 2x - 2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Finden Sie $a \in \mathbb{R}$ und $g(x) \in o(|x - x_0|)$ mit $f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + g(x)$.

Lösung:
Setze $y = x - x_0$, $a = -3x_0^2 + 6x_0 + 2$ und $g(x) = y(-(y^2 + 3yx_0) + 3y)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y + x_0) \\
&= -(y + x_0)^3 + 3(y + x_0)^2 + 2(y + x_0) - 2 \\
&= -(y^3 + 3y^2x_0 + 3yx_0^2 + x_0^3) + 3(y^2 + 2yx_0 + x_0^2) + 2(y + x_0) - 2 \\
&= f(x_0) + y(-(y^2 + 3yx_0 + 3x_0^2) + 3(y + 2x_0) + 2) \\
&= f(x_0) + ay + y(-(y^2 + 3yx_0) + 3y) \\
&= f(x_0) + ay + g(x).
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $g(x) \in o(|y|)$, da

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{|g(x)|}{|y|} &= \lim_{x \to x_0} \frac{|y|| - (y^2 + 3yx_0) + 3y|}{|y|} \\
&= \lim_{x \to x_0} | - ((x - x_0)^2 + 3(x - x_0)x_0) + 3(x - x_0)| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.4 (Mittelwertsatz) **[2 + 2 + 2 + 2* Punkte]**

(i) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Sei ferner $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $\|f'(x)\| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f lipschitzstetig mit Konstante L ist, d. h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot |x - y|$.

(ii) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung mit $g'(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $g(a) \geq g(0) + a$ für alle $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(iii) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine differenzierbare Abbildung mit $h'(x) = a \cdot h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x > x_0$ gilt: $h(x) \geq x^2$.

(iv)* Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Aussage in (iii) für x^n anstelle von x^2.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Funktion $e(x) = h(0)^{-1}h(a^{-1}x)$.)

Lösung:

(i) Nach dem vektorwertigen Mittelwertsatz gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{a \in (x,y)} \|f'(a)\| \, |x - y| \leq L \cdot |x - y|.$$

(ii) Offensichtlich gilt die Aussage für $a = 0$. Sei also $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in (0, a)$ mit

$$g(a) - g(0) = a \cdot g'(\xi).$$

Daraus folgt schon $g(a) = ag'(\xi) + g(0) \geq a + g(0)$.

(iii) Dieser Aufgabenteil ist nur ein Spezialfall von (iv) für $n = 2$. Man kann diese zum Beispiel lösen, indem man den Induktionsanfang aus (iv) durchführt und anschließend den Mittelwertsatz noch drei weitere Male auf ein geeignetes Intervall der Form $(\frac{x}{2}, x)$ anwendet.

(iv) Möchte man mit dem Hinweis arbeiten, werden die involvierten Konstanten etwas schöner: $e(0) = h(0)^{-1}h(0) = 1$ und

$$e'(x) = h(0)^{-1}h'(a^{-1}x)a^{-1} = h(0)^{-1}h(a^{-1}x) = e(x).$$

Damit ist e überall positiv und stetig differenzierbar, erfüllt $e' = e$ und $e(0) = 1$. Der Beweis kann jedoch auch direkt mit $h(x)$ durchgeführt werden, was wir im Folgenden tun.

Wir beweisen zunächst per vollständiger Induktion die folgende Aussage:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n, b_n > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq a_n$ gilt: $h(x) \geq b_n x^n$.

$n = 0$: Sei $x > 1$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi > 0$ mit

$$h(x) = h'(\xi)x + h(0) = ah(\xi) + h(0) > h(0) \cdot x^0.$$

Setze also $a_0 = 1$ und $b_0 = h(0)$.

$n \to n + 1$: Angenommen die Aussage wurde bereits für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Sei $x > 2a_n$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi > \frac{x}{2} > a_n$ mit

$$h(x) = h'(\xi) \cdot \frac{x}{2} + h\left(\frac{x}{2}\right) > ah(\xi) \cdot \frac{x}{2} \geq ab_n\xi^n \cdot \frac{x}{2} > ab_n \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{x}{2} = \left(\frac{ab_n}{2^{n+1}}\right) x^{n+1}.$$

Setze also $a_{n+1} = 2a_n$ und $b_{n+1} = \left(\frac{ab_n}{2^{n+1}}\right)$.

Mithilfe der obigen Hilfsaussage beweisen wir nun die Hauptaussage. Sei hierfür $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $a_{n+1}, b_{n+1} > 0$, sodass für alle $x > a_{n+1}$ gilt:

$$\frac{h(x)}{x^n} \geq b_{n+1}x.$$

Inbesondere gilt für alle $x > \max\left\{a_{n+1}, b_{n+1}^{-1}\right\} =: x_0$:

$$\frac{h(x)}{x^n} \geq b_{n+1} b_{n+1}^{-1} = 1,$$

also

$$h(x) > x^n,$$

was zu zeigen war.

Abgabe: Bis **Donnerstag, 30. April 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor.
Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.