O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 3

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Proposition 4.64 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1 (Regeln von de l'Hospital) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

(i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{\log\left|\frac{x}{a}\right|}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x^m+1)}{\log(x^n)}$ mit $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\mathrm{e}^x-1)-1}{\mathrm{e}^{\sin(x)}-x-1}$.

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ gelten.)

Lösung:

Aufgabe 3.2 (Konvexität und zweite Ableitung) **[4 Punkte]**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \lambda \le 1$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

gilt. (Die Funktion heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.
Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(Hinweise: Nehme für die Hinrichtung zunächst an, dass $f''(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in I$, und betrachte die Funktion $\varphi(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$. Wende für die Rückrichtung den Mittelwertsatz auf die Intervalle (x_1, x) und (x, x_2) an, wobei x geeignet zu wählen ist.)

Lösung:

Aufgabe 3.3 (Konvexität und Beschränktheit) **[2 + 2 Punkte]**
Seien $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $I = (-r, r)$.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $f'(0) > a$ und $f(0) = 0$.
Zeigen Sie: $f(x) > ax$ für alle $x \in (0, r)$.

(b) Sei $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $\|u\|_{L^\infty(I)} \le M$ für ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$.
Zeigen Sie: Falls u in 0 differenzierbar ist, dann gilt $|u'(0)| \le \frac{2M}{r}$.

Lösung:

Aufgabe 3.4 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen) **[1 + 1 + 1 + 1 + 2* Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Betrachte die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle Ax, x\rangle$.

(i) Es bezeichne $\mathbb{S}^{n-1}$ die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| = 1\}$.
Zeigen Sie, dass $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(x)$ existiert.

(ii) Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ senkrecht zu x_0, d. h. es gelte $\langle x_0, y_0\rangle = 0$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $\dot\alpha(0) = y_0$.

(iii) Zeigen Sie, dass Ax_0 senkrecht zu $x_0^{\perp}$ steht, d. h. es gilt $\langle Ax_0, z\rangle = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x_0, z\rangle = 0$.

(iv) Zeigen Sie, dass x_0 ein Eigenvektor der Matrix A ist, d. h. es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $Ax_0 = \lambda x_0$.

(v)* Zeigen Sie, dass eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$ existiert, die aus Eigenvektoren der Matrix A zu reellen Eigenwerten besteht.

(Hinweis: Für die Beweise aller Aufgabenteile dürfen keine Sätze aus der Linearen Algebra über Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen angewandt werden.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 08. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.