O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 3

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ
4	4	4	6	18

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Proposition 4.64 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1 (Regeln von de l'Hospital) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren):

(i) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\log\left|\frac{x}{a}\right|}$ mit $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^m+1)}{\log(x^n)}$ mit $m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}_{>0}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\mathrm{e}^x-1)-1}{\mathrm{e}^{\sin(x)}-x-1}$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$.

(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\sin'(x)=\cos(x)$ und $\cos'(x)=-\sin(x)$ gelten.)

Lösung: In allen Aufgabenteilen sind die Voraussetzungen für die Anwendung der Regeln von de l'Hospital leicht zu prüfen, da alle auftretenden Funktionen im Zähler und im Nenner in ihren jeweiligen Definitionsbereichen differenzierbar sind.

(i) Art des Bruchs: $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\log\left|\frac{x}{a}\right|}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{a}{x}\cdot\frac{1}{a}}=\lim_{x\to a}x=a.$$

(ii) Art des Bruchs: $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^m+1)}{\log(x^n)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x^m+1)}{n\log(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{mx^{m-1}}{x^m+1}}{\frac{n}{x}}=\frac{m}{n}\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^m+1}=\frac{m}{n}.$$

(iii) Hier muss zweimal abgeleitet werden. Die Art des Bruchs ist jeweils $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\mathrm{e}^x-1)-1}{\mathrm{e}^{\sin(x)}-x-1}&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\sin(x)}\cdot\cos(x)-1}\\&=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^{2x}+\sin(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\sin(x)}\cdot\cos^2(x)-\mathrm{e}^{\sin(x)}\cdot\sin(x)}\\&=-\frac{\cos(1-1)\cdot 1+\sin(1-1)\cdot 1}{\mathrm{e}^0\cdot 1-\mathrm{e}^0\cdot 0}\\&=-1.\end{aligned}$$

(iv) Wir bringen den Ausdruck zunächst auf die gewünschte Form:

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)}.$$

Damit ist die Art des Bruchs $\frac{0}{0}$ (bei zweifacher Anwendung der Regel von de l'Hospital).

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Aufgabe 3.2 (Konvexität und zweite Ableitung) **[4 Punkte]**
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \lambda \le 1$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

gilt. (Die Funktion heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion.
Zeigen Sie: f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(Hinweise: Nehme für die Hinrichtung zunächst an, dass $f''(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in I$, und betrachte die Funktion $\varphi(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$. Wende für die Rückrichtung den Mittelwertsatz auf die Intervalle (x_1, x) und (x, x_2) an, wobei x geeignet zu wählen ist.)

Lösung: *Hinrichtung:* Wir beweisen die Hinrichtung durch Kontraposition. Es gebe also ein $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c = f'(x_0)$ und setze

$$\varphi(x) = f(x) - c(x - x_0).$$

Dann ist $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Damit besitzt φ in x_0 ein lokales Maximum. Es gibt also ein $h > 0$, sodass $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$ und

$$\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0) \text{ und } \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0).$$

Daraus folgt

$$f(x_0) = \varphi(x_0) > \frac{1}{2}(\varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0 + h)) = \frac{1}{2}(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)).$$

Setzt man $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$ und $\lambda = \frac{1}{2}$, so ist $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, also

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Damit ist f nicht konvex.
Rückrichtung: Sei vorausgesetzt, dass $f''(x) \ge 0$ für alle $x \in I$. Dann ist die Ableitung $f'\colon I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Seien $x_1, x_2 \in I$, $0 < \lambda < 1$ und $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Wir können annehmen, dass $x_1 < x_2$. Dann gilt $x_1 < x < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \le f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da $x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$, folgt daraus

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1-\lambda} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda}$$

und weiter

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Die Funktion ist also konvex.

Aufgabe 3.3 (Konvexität und Beschränktheit) **[2 + 2 Punkte]**
Seien $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $I = (-r, r)$.

(a) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $f'(0) > a$ und $f(0) = 0$.

Zeigen Sie: $f(x) > ax$ für alle $x \in (0, r)$.

(b) Sei $u\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion mit $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$.

Zeigen Sie: Falls u in 0 differenzierbar ist, dann gilt $|u'(0)| \leq \frac{2M}{r}$.

Lösung:

(a) Da $f'(0) > a$, gibt es ein $\delta_1 > 0$, sodass für alle $h \in I$ mit $|h| < \delta_1$ gilt:

$$\frac{f(h)}{h} > a.$$

Daraus folgt insbesondere

$$f(x) > ax$$

für alle $x \in (0, \delta_1) \cap (0, r)$.

Sei nun $y \in (0, 2\delta_1) \cap (0, r)$. Dann gilt für $x = \frac{y}{2}$, dass $f(x) > ax$. Aus der Konvexität von f folgt

$$\frac{ay}{2} = ax < f(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot 0\right) \leq \frac{1}{2} \cdot f(y) + \frac{1}{2} \cdot f(0) = \frac{f(y)}{2},$$

also insbesondere $f(y) > ay$.

Wir können das gleiche Argument für $\delta_2 = 2\delta_1$ anstelle von δ_1 wiederholen und erhalten induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt:

$$f(x) > ax$$

für alle $x \in (0, 2^n\delta_1) \cap (0, r)$. Es genügt nun, $n \in \mathbb{N}$ so zu wählen, dass $2^n > r\delta_1^{-1}$.

(b) *Fall 1:* $u'(0) > 0$. Angenommen u ist in 0 differenzierbar, aber $|u'(0)| > \frac{2M}{r} =: a$.

Sei $f(x) = u(x) - u(0)$. Dann ist f konvex (sehr leicht nachzurechnen), erfüllt $f'(0) = u'(0) > a$ und $f(0) = 0$. Damit können wir Aufgabenteil (a) anwenden und erhalten

$$f(x) > ax$$

für alle $x \in (0, r)$. Da $|u(0)| \leq M$, haben wir

$$ar + u(0) = 2M + u(0) \geq M.$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty(I)} &= \sup_{x\in(-r,r)} |u(x)| \\
&\geq \sup_{x\in(0,r)} (f(x)+u(0)) \\
&> \sup_{x\in(0,r)} (ax+u(0)) \\
&\geq (ar+u(0)) \\
&\geq M,
\end{aligned}
$$

ein Widerspruch.

Fall 2: $u'(0) < 0$.

Betrachte die Funktion $v(x) = u(-x)$. Für diese gilt $v'(0) = -u'(0) > 0$. Zudem ist v konvex (leicht nachzurechnen) und $\|v\|_{L^\infty(I)} \leq M$. Damit können wir wie in Fall 1 argumentieren und erhalten $|-u'(0)| = |v'(0)| \leq \frac{2M}{r}$.

Aufgabe 3.4 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen) **[1 + 1 + 1 + 1 + 2* Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Betrachte die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle Ax, x\rangle$.

(i) Es bezeichne $\mathbb{S}^{n-1}$ die Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n\colon \|x\| = 1\}$.

Zeigen Sie, dass $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\varphi(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(x)$ existiert.

(ii) Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ senkrecht zu x_0, d. h. es gelte $\langle x_0, y_0\rangle = 0$.

Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $\alpha(0) = x_0$ und $\dot\alpha(0) = y_0$.

(iii) Zeigen Sie, dass Ax_0 senkrecht zu $x_0^\perp$ steht, d. h. es gilt $\langle Ax_0, z\rangle = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x_0, z\rangle = 0$.

(iv) Zeigen Sie, dass x_0 ein Eigenvektor der Matrix A ist, d. h. es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $Ax_0 = \lambda x_0$.

(v)* Zeigen Sie, dass eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$ existiert, die aus Eigenvektoren der Matrix A zu reellen Eigenwerten besteht.

(Hinweis: Für die Beweise aller Aufgabenteile dürfen keine Sätze aus der Linearen Algebra über Eigenvektoren reeller symmetrischer Matrizen angewandt werden.)

Lösung:

(i) Da $\mathbb{S}^{n-1}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist es eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung φ ist gegen durch $\varphi(x) = p(T(x), x)$, wobei $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (a,b)^t \mapsto \langle a, b\rangle$ und $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$. Hierbei ist T eine stetige lineare Abbildung (alle linearen Abbildungen auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum sind stetig) und p ist als Summe und Produkt polynomialer Funktionen ebenso stetig. Daher ist auch φ stetig und nimmt auf der kompakten Menge $\mathbb{S}^{n-1}$ sein Minimum an.

(ii) Sei $\varepsilon = 1$ und setze

$$\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^{n-1}, t \mapsto \frac{x_0 + ty_0}{\|x_0 + ty_0\|}.$$

Da $x_0 \perp y_0$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{x_0 + ty_0}{\langle x_0 + ty_0, x_0 + ty_0\rangle^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x_0 + ty_0}{\left(\langle x_0, x_0\rangle + 2t\langle x_0, y_0\rangle + t^2\langle y_0, y_0\rangle\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{x_0 + ty_0}{\left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Der Nenner ist stets strikt positiv, weshalb diese Funktion als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auch stetig differenzierbar ist.
Die Ableitung ist

$$\dot\alpha(t) = \frac{y_0 \cdot \left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}} - (x_0 + ty_0) \cdot \frac{1}{2}\left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t\|y_0\|^2}{\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2}.$$

Einsetzen von $t = 0$ liefert

$$\dot\alpha(0) = \frac{y_0 \cdot \left(\|x_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|x_0\|^2} = y_0.$$

(iii) Sei $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x_0, z\rangle = 0$. Wir wählen α wie in Aufgabenteil (ii) für $y_0 = z$. Setze

$$g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \varphi(\alpha(t)),$$

also, wegen der Symmetrie von A,

$$\begin{aligned} g(t) &= \left\langle A\left(\frac{x_0 + ty_0}{\left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right), \frac{x_0 + ty_0}{\left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\rangle \\ &= \frac{\langle A(x_0 + ty_0), x_0 + ty_0\rangle}{\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2} \\ &= \frac{\langle Ax_0, x_0\rangle + 2t\langle Ax_0, y_0\rangle + t^2\langle Ay_0, y_0\rangle}{\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2}.\end{aligned}$$

Ableiten liefert

$$\dot g(t) = \frac{2\left(\langle Ax_0, y_0\rangle + t\langle Ay_0, y_0\rangle\right) \cdot \left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right) - \langle A(x_0 + ty_0), x_0 + ty_0\rangle \cdot 2t\|y_0\|^2}{\left(\|x_0\|^2 + t^2\|y_0\|^2\right)^2}.$$

Da φ in x_0 sein Minimum auf $\mathbb{S}^{n-1}$ annimmt, hat g in 0 ein (lokales) Minimum. Wir erhalten also

$$\dot g(0) = 0.$$

Schließlich folgt daraus

$$0 = \dot g(0) = \frac{2\langle Ax_0, y_0\rangle \cdot \|x_0\|^2}{\|x_0\|^2},$$

also $\langle Ax_0, y_0\rangle = 0$, was zu zeigen war.

(iv) Sei $\mathcal{B} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$. Eine solche Basis existiert, da jedes orthonormale linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ zu einer orthonormalen Basis ergänzt werden kann (vgl. Gram–Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren). Damit wird das orthogonale Komplement von x_0 durch $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ aufgespannt.

Sei nun $Ax_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i$. Dann gilt nach (iii)

$$\lambda_i = \langle Ax_0, x_i \rangle = 0$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. Hieraus folgt schon $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

(v) Wir zeigen diese Aussage per Induktion. Der Induktionsanfang ist durch die Aufgabenteile (i) bis (iv) gegeben.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n-2$ beliebig, aber fest, und sei $\mathcal{E} = \{x_0, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ eine Menge von Eigenvektoren von A, die paarweise orthogonal sind. Wir finden nun einen Eigenvektor $x_{k+1} \in S^{n-1}$ von A, der senkrecht auf allen Vektoren in $\mathcal{E}$ steht.

Betrachte hierzu $\mathcal{E}^\perp$, das orthogonale Komplement zu $\mathcal{E}$, also alle Vektoren in $\mathbb{R}^n$, die senkrecht auf allen Vektoren in $\mathcal{E}$ stehen. Dieses ist abgeschlossen als endlicher Schnitt abgeschlossener Mengen (nämlich der orthogonalen Komplemente der einzelnen Vektoren in $\mathcal{E}$). Damit ist $\mathcal{E}^\perp \cap \mathbb{S}^{n-1}$ kompakt. Wir können nun die Aufgabenteile (i) bis (iv) für $\mathcal{E}^\perp \cap \mathbb{S}^{n-1}$ anstelle von $\mathbb{S}^{n-1}$ durchführen, um den gesuchten Eigenvektor $x_{k+1} \in \mathcal{E}^\perp \cap \mathbb{S}^{n-1}$ zu finden.

Abgabe: Bis **Freitag, 08. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.