O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 4

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Theorem 4.94 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 4.1 (Partialbruchzerlegung) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Führen Sie die Partialbruchzerlegung für die folgenden reellen rationalen Funktionen durch, d. h. finden Sie für jede der folgenden Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ die komplexen Zahlen c_{ij}, sodass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x-\zeta_i)^j}.$$

Hierbei bezeichnen ζ_i, $1 \le i \le n$, die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen von $q(x)$ mit Vielfachheit m_i.

$$\text{(i)}\quad \frac{18x^2+15x-4}{(3x+1)^2(x-2)}, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{x}{(x-2)^3},$$
$$\text{(iii)}\quad \frac{6x^2-12}{(x^2-4)(x+1)}, \qquad \text{(iv)}\quad \frac{1}{x^4+4}.$$

(Hinweis: Sie können wie beim Beweis der Existenzaussage in Proposition 4.90 vorgehen.)

Lösung:

Aufgabe 4.2 (Gronwallsches Lemma und stetige Differenzierbarkeit) **[3 + 1 Punkte]**

(a) Sei $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ eine Funktion mit $\varphi(t) \le t \cdot \sup\limits_{\tau\in[0,t]} \varphi(\tau)$.

Zeigen Sie, dass $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \ne 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

überall differenzierbar, aber nicht überall stetig differenzierbar ist.

Lösung:

Aufgabe 4.3 (Zweite Ableitungen) **[2 + 2 + 2* Punkte]**

(a) Zeigen Sie für eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität

$$f''(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^2}.$$

(b) Für eine Abbildung $u\colon A \to \mathbb{R}$, wobei A einen topologischen Raum bezeichnet, nennen wir die Menge $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in A\colon u(x) \neq 0\}}$ den *Träger* (englisch: "support") von u.

Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) > 0$

$$\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)} \leq 2\,\|\varphi''\|_{L^\infty}$$

gilt.

(Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ ein Maximum der Funktion $\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)+\varepsilon}$.)

(c)* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $g \in C^2(\Omega)$.

Zeigen Sie, dass für $x_0 \in \Omega$ und $A \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A = g''(x_0)$,

(ii) $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{A}{2}\cdot(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2)$.

Lösung:

Aufgabe 4.4 (Taylorsche Formeln) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Sei $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ermitteln Sie die Koeffizienten

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

der Taylorentwicklung von f in $x_0 = 0$.

(ii) Berechnen Sie den Konvergenzradius r der Taylorreihe

$$T(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$. Zeigen Sie, dass $(R_n(f,0)(x))_n$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Hierbei bezeichnet $R_n(f,0)(x)$ das Restglied aus Theorem 4.94. Folgern Sie, dass $f(x) = T(f,0)(x)$ gilt.

(iv) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $g\colon (-a,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{a+x}$. Bearbeiten Sie die Aufgabenteile (i) bis (iii) für g anstelle von f.

(Hinweis: Verwenden Sie Ihre Ergebnisse für die Funktion f aus den Aufgabenteilen (i) bis (iii) anstatt die Berechnungen für g zu wiederholen.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 15. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.