O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

# Übungen zur Vorlesung Analysis II
## Blatt 4

**Abgabe von:** Musterstudent
**Tutor(in):** Mein Lieblingstutor

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 6 | 4 | 18 |

**Allgemeiner Hinweis:** Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Theorem 4.94 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

**Aufgabe 4.1** (Partialbruchzerlegung) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Führen Sie die Partialbruchzerlegung für die folgenden reellen rationalen Funktionen durch, d. h. finden Sie für jede der folgenden Funktionen $\frac{p(x)}{q(x)}$ die komplexen Zahlen $c_{ij}$, sodass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x-\zeta_i)^j}.$$

Hierbei bezeichnen $\zeta_i$, $1 \le i \le n$, die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen von $q(x)$ mit Vielfachheit $m_i$.

(i) $\dfrac{18x^2+15x-4}{(3x+1)^2(x-2)}$, (ii) $\dfrac{x}{(x-2)^3}$,

(iii) $\dfrac{6x^2-12}{(x^2-4)(x+1)}$, (iv) $\dfrac{1}{x^4+4}$.

*(Hinweis: Sie können wie beim Beweis der Existenzaussage in Proposition 4.90 vorgehen.)*

**Lösung:**

(i)

$$\frac{18x^2+15x-4}{(3x+1)^2(x-2)} = \frac{3}{(3x+1)^2} + \frac{2}{x-2} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{2}{x-2}$$

(ii)

$$\frac{x}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^2}$$

(iii)

$$\frac{6x^2-12}{(x^2-4)(x+1)} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

(iv) Die Eulerschen Formel gibt uns die vier komplexen Nullstellen $\pm(1 \pm \mathrm{i})$ von $x^4 + 4$. Mit einem Zwischenschritt erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+4} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{-x+2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+2} \\ &= \frac{\frac{-1-\mathrm{i}}{16}}{x-(1+\mathrm{i})} + \frac{\frac{-1+\mathrm{i}}{16}}{x-(1-\mathrm{i})} + \frac{\frac{1+\mathrm{i}}{16}}{x+(1+\mathrm{i})} + \frac{\frac{1-\mathrm{i}}{16}}{x+(1-\mathrm{i})}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 4.2** (Gronwallsches Lemma und stetige Differenzierbarkeit) **[3 + 1 Punkte]**

(a) Sei $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ eine Funktion mit $\varphi(t) \leq t \cdot \sup\limits_{\tau \in [0,t]} \varphi(\tau)$.

Zeigen Sie, dass $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

überall differenzierbar, aber nicht überall stetig differenzierbar ist.

**Lösung:**

(a) Wir zeigen

$$\sup_{t \in [0,1/2]} \varphi(t) = 0,$$

was bereits $\varphi(t) = 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ impliziert.

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,1/2]} \varphi(t) &\leq \sup_{t \in [0,1/2]} \left( t \cdot \sup_{\tau \in [0,t]} \varphi(\tau) \right) \\ &\leq \sup_{t \in [0,1/2]} \left( \frac{1}{2} \cdot \sup_{\tau \in [0,t]} \varphi(\tau) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sup_{t \in [0,1/2]} \left( \sup_{\tau \in [0,t]} \varphi(\tau) \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sup_{t \in [0,1/2]} \varphi(t). \end{aligned}$$

Wäre

$$\sup_{t \in [0,1/2]} \varphi(t) > 0,$$

erhielten wir $1 \leq \frac{1}{2}$, ein Widerspruch. Da

$$0 \leq \sup_{t \in [0,1/2]} \varphi(t) \leq 1,$$

impliziert dies

$$\sup_{t \in [0,1/2]} = 0.$$

(b) Die Funktion $f(x)$ ist an jeder Stelle differenzierbar, weil

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0.$$

Die Ableitung

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist aber an der Stelle 0 nicht stetig.

**Aufgabe 4.3** (Zweite Ableitungen) **[2 + 2 + 2* Punkte]**

(a) Zeigen Sie für eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Identität

$$f''(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^2}.$$

(b) Für eine Abbildung $u\colon A \to \mathbb{R}$, wobei $A$ einen topologischen Raum bezeichnet, nennen wir die Menge $\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in A\colon u(x) \neq 0\}}$ den *Träger* (englisch: "support") von $u$.

Sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) > 0$

$$\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)} \leq 2\left\|\varphi''\right\|_{L^\infty}$$

gilt.

*(Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ ein Maximum der Funktion $\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)+\varepsilon}$.)*

(c)* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $g \in C^2(\Omega)$.

Zeigen Sie, dass für $x_0 \in \Omega$ und $A \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $A = g''(x_0)$,

(ii) $g(x) = g(x_0) + g'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{A}{2}\cdot(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2)$.

**Lösung:**

(a) Wir wenden die Regel von de l'Hospital vom Typ $\frac{0}{0}$ an:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{f'(x+t) - f'(x-t)}{2t} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{f'(x+t) - f'(x)}{t} + \frac{f'(x-t) - f'(x)}{-t}\right) \\ &= \frac{1}{2}(f''(x) + f''(x)) \\ &= f''(x). \end{aligned}$$

(b) Sei $\Omega$ der kompakte Träger von $\varphi$. Bemerke zunächst: Da $Z := \mathbb{R}\backslash\Omega$ offen ist und $\varphi(Z) = \{0\}$, folgt $\varphi^{(n)}(Z) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachen die Funktion

$$u_\varepsilon(x) = \frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x) + \varepsilon}.$$

Da diese als Komposition stetiger Funktionen stetig ist (und der Nenner stets positiv ist), nimmt sie auf $\Omega$ ihr Maximum an. Sei $x_\varepsilon \in \Omega$ mit

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \sup_{x\in\Omega} u_\varepsilon(x).$$

Nach obiger Bemerkung gilt $u_\varepsilon(Z) = \{0\}$, weshalb schon

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = \sup_{x\in\mathbb{R}} u_\varepsilon(x)$$

folgt. Die Funktion $u_\varepsilon$ nimmt also in $x_\varepsilon$ ihr globales Maximum an. Daraus folgt

$$u'(x_\varepsilon) = 0.$$

Mit den Ableitungsregeln erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= u'(x_\varepsilon) \\ &= \frac{2\varphi'(x_\varepsilon)\varphi''(x_\varepsilon)(\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon) - (\varphi'(x_\varepsilon))^2\varphi'(x_\varepsilon)}{(\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon)^2} \\ &= \frac{(\varphi'(x_\varepsilon))^2}{\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon} \cdot \left(\frac{2\varphi''(x_\varepsilon)}{\varphi'(x_\varepsilon)} - \frac{\varphi'(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt entweder

$$\frac{(\varphi'(x_\varepsilon))^2}{\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon} = 0$$

oder

$$\left(\frac{2\varphi''(x_\varepsilon)}{\varphi'(x_\varepsilon)} - \frac{\varphi'(x_\varepsilon)}{\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon}\right) = 0.$$

Ersteres impliziert sofort

$$\frac{(\varphi'(x_\varepsilon))^2}{\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon} \leq 2\left\|\varphi''\right\|_{L^\infty},$$

Zweiteres gibt uns

$$\frac{(\varphi'(x_\varepsilon))^2}{\varphi(x_\varepsilon)+\varepsilon} = 2\varphi''(x_\varepsilon) \leq 2\left\|\varphi''\right\|_{L^\infty}.$$

Es folgt also für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)+\varepsilon} = u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq 2\left\|\varphi''\right\|_{L^\infty}.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ erhalten wir schließlich

$$\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)} \leq 2\left\|\varphi''\right\|_{L^\infty}.$$

(c) Nach Proposition 4.96 gilt

$$g(x) = T_2(g, x_0)(x) + o(|x-x_0|^2)$$

und $T_2(g, x_0)(x)$ ist das einzige Polynom mit dieser Eigenschaft.

**(i) impliziert (ii):** Nach Definition vom Taylorpolynom zweiten Grades erhalten wir

$$T_2(g, x_0)(x) = g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{g''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 = g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\frac{A}{2}\cdot(x-x_0)^2,$$

wie gewünscht.

**(ii) impliziert (i):** Da

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{A}{2} \cdot (x - x_0)^2 + o(|x - x_0|^2) = T_2(g, x_0)(x) + o(|x - x_0|^2),$$

erhalten wir mit der Eindeutigkeitsaussage aus Proposition 4.96, dass

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{A}{2} \cdot (x - x_0)^2 = T_2(g, x_0)(x).$$

Inbesondere gibt uns dies durch einen Koeffizientenvergleich $A = g''(x_0)$.

**Aufgabe 4.4** (Taylorsche Formeln) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**

Sei $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ermitteln Sie die Koeffizienten

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad 1 \le k \le n,$$

der Taylorentwicklung von $f$ in $x_0 = 0$.

(ii) Berechnen Sie den Konvergenzradius $r$ der Taylorreihe

$$T(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$. Zeigen Sie, dass $(R_n(f, 0)(x))_n$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Hierbei bezeichnet $R_n(f, 0)(x)$ das Restglied aus Theorem 4.94. Folgern Sie, dass $f(x) = T(f, 0)(x)$ gilt.

(iv) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $g\colon (-a, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{a + x}$. Bearbeiten Sie die Aufgabenteile (i) bis (iii) für $g$ anstelle von $f$.

*(Hinweis: Verwenden Sie Ihre Ergebnisse für die Funktion $f$ aus den Aufgabenteilen (i) bis (iii) anstatt die Berechnungen für $g$ zu wiederholen.)*

**Lösung:**

(i) Für $n \ge 3$ haben wir:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1 + x)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1 + x)^{-\frac{3}{2}} \\ f^{(3)}(x) &= -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}(1 + x)^{-\frac{5}{2}} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n - 3) \cdot (1 + x)^{-\frac{2n-1}{2}}}{2^n} \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = 0$ liefert

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_2 &= -\frac{1}{8} \\
a_3 &= \frac{3}{48} \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \cdot \prod_{i=3}^{n} (2i-3)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir auch die gängige Darstellung

$$a_n = \binom{\frac{1}{2}}{n} := \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right)}{n!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Für $n \geq 3$ haben wir

$$|a_n| = \frac{\prod_{i=3}^{n}(2i-3)}{2^n n!} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!}.$$

Wir schätzen in zwei Richtungen ab:

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} \\
&\leq \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{2^n n!} \\
&= \frac{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{2^n n!} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} \\
&\geq \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-4)}{2^n n!} \\
&= \frac{(n-2)!}{n!} \\
&= \frac{1}{(n-1)n}.
\end{aligned}$$

Grenzwertbildung liefert

$$1 \geq \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{((n-1)n)^{\frac{1}{n}}} = 1,$$

da

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}((n-1)n)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\left(\log(n-1)+\log(n)\right)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n-1)+\log(n)}{n}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}}{1}\right)\\
&= \exp(0) = 1
\end{aligned}
$$

(vgl. Lemma 4.50). Daher ist $r = 1$.

(iii) Man kann für $0 < x < 1$ beispielsweise die Abschätzung aus Theorem 9.94 verwenden und ähnliche Schritte durchführen wie in (ii). Wir präsentieren hier einen alternativen Weg, der ohne Restgliedabschätzungen auskommt.

Sei $T(x) = T(f,0)(x)$. Wir zeigen

$$
D\left(\frac{T(x)}{f(x)}\right) = 0.
$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(k+1)a_{k+1} + ka_k &= (k+1)\frac{\prod_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{2}-i\right)}{(k+1)!} + k\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)}{k!}\\
&= \frac{\prod_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{2}-i\right) + k\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)}{k!}\\
&= \frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2}-i\right)\left(\left(\frac{1}{2}-k\right)+k\right)}{k!}\\
&= a_k\left(\left(\frac{1}{2}-k\right)+k\right)\\
&= \frac{1}{2}a_k.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
(1+x)DT(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} ka_k x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)a_{k+1} + ka_k\right)x^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}a_k\right)x^k\\
&= \frac{1}{2}T(x).
\end{aligned}
$$

Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{T(x)}{f(x)}\right) &= \frac{f(x)DT(x) - T(x)Df(x)}{(f(x))^2} \\
&= \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}DT(x) - T(x)\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{(1+x)} \\
&= \frac{(1+x)DT(x) - \frac{1}{2}T(x)}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}T(x) - \frac{1}{2}T(x)}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\frac{T(x)}{f(x)}$ eine konstante Funktion ist. Da

$$\frac{T(0)}{f(0)} = 1,$$

folgt schon $T(x) = f(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Wir haben also insbesondere für alle $x \in [-1, 1]$:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f,0)(x) = \lim_{n\to\infty}(f(x) - T_n(f,0)(x)) = f(x) - T(f,0)(x) = 0.$$

(iv)

$$g(x) = (a+x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

**(i):** Da

$$g^{(n)}(x) = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-n} f^{(n)}\left(\frac{x}{a}\right),$$

erhalten wir

$$a_n = a^{\frac{1}{2}-n}\binom{\frac{1}{2}}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

**(ii):**

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|a^{\frac{1}{2}-n}\binom{\frac{1}{2}}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left|a^{-\frac{1}{2n}}\right|\left|a^{-1}\right|\left|\binom{\frac{1}{2}}{n}^{\frac{1}{n}}\right|\right) = 1 \cdot a^{-1} \cdot 1.$$

Daraus folgt $r = a$.

**(iii):** Sei $x \in [-a, a]$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R_n(g,0)(x) &= \lim_{n\to\infty}(g(x) - T_n(g,0)(x)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{x}{a}\right) - \sum_{k=0}^{n} a^{\frac{1}{2}-k}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k\right) \\
&= a^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{x}{a}\right) - \sum_{k=0}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{x}{a}\right)^k\right) \\
&= a^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(R_n(f,0)\left(\frac{x}{a}\right)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also
$$g(x) = \lim_{n\to\infty}(T_n(g,0)(x) + R_n(g,0)(x)) = T(g,0)(x).$$

**Abgabe:** Bis **Freitag, 15. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.