O. Schnürer, L. S. Krapp — Universität Konstanz
Sommersemester 2020 — Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 5

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Korollar 5.9 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1 (Integrabilität und Lipschitzstetigkeit) **[4 + 2* Punkte]**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $I = [a, b]$. Sei ferner $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion mit Konstante $L \geq 0$, d. h. es gelte

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in I$.

(i) Sei P eine Partition von I. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(f, P) \leq L \cdot \eta(P) \cdot |b - a|$$

gilt. Folgern Sie, dass f das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt.

(ii)* Untersuchen Sie hölderstetige Funktionen auf Riemannsche Integrabilität.

Lösung:

Aufgabe 5.2 (Riemann Integrabilität) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Welche der folgenden Funktionen sind Riemann integrabel?

(a) $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

(b) $g\colon [0, 2020] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [n, n+1), \quad n \text{ gerade}, \\ -1, & x \in [n, n+1), \quad n \text{ ungerade}. \end{cases}$

(c) $u\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die beiden Intervalle $[0, \frac{\varepsilon}{4}]$ und $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$.)

(d) $v\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Lösung:

Aufgabe 5.3 (Riemannsches Integral) **[4 + 2* Punkte]**
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(i) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und setze $g = f|_{[0,a]}$. Berechnen Sie
$$\int_0^a g(x)\,dx.$$

(ii)* Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ und setze $h = f|_{[a,b]}$. Berechnen Sie
$$\int_a^b h(x)\,dx.$$

Lösung:

Aufgabe 5.4 (Gleichmäßige Konvergenz) **[1 + 1 + 2 Punkte]**
Sei K ein kompakter metrischer Raum und sei $f_n\colon K \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, d. h. es gelte
$$f_n(x) \ge f_m(x)$$
für alle $x \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \ge n$. Sei ferner $g\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und konvergiere $(f_n)_n$ punktweise gegen g für $n \to \infty$.

(i) Sei $h_n = f_n - g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(h_n)_n$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen ist, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $A_n := h_n^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ eine offene Überdeckung von K ist.

(iii) Folgern Sie, dass $f_n \rightrightarrows g$ für $n \to \infty$ gilt.

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 22. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.