O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 5

1	2	3	4	Σ
6	4	6	4	20

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor
Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Korollar 5.9 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 5.1 (Integrabilität und Lipschitzstetigkeit) **[4 + 2* Punkte]**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $I = [a, b]$. Sei ferner $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine lipschitzstetige Funktion mit Konstante $L \geq 0$, d. h. es gelte

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in I$.

(i) Sei P eine Partition von I. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(f, P) \leq L \cdot \eta(P) \cdot |b - a|$$

gilt. Folgern Sie, dass f das Riemannsche Integrabilitätskriterium erfüllt.

(ii)* Untersuchen Sie hölderstetige Funktionen auf Riemannsche Integrabilität.

Lösung:

(i) Sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Die Lipschitzstetigkeit von f impliziert für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$\operatorname{osc} f_i = \sup_{x,y \in I_i} |f(x) - f(y)| \leq L \cdot \sup_{x,y \in I_i} |x - y| = L \cdot |I_i|.$$

Folglich

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc} f_i \cdot |I_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} L \cdot |I_i|^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} L \cdot \eta(P) \cdot |I_i| = L \cdot \eta(P) \cdot |I|.$$

Fixiert man $\varepsilon > 0$ und wählt man eine Partition mit Feinheit $\eta(P) < \frac{\varepsilon}{L \cdot |I|}$ (z. B. die Partition von I in $n = \lceil \frac{L \cdot |I|}{\varepsilon} \rceil + 1$ gleichlange Teilintervalle) bzw. $\eta(P) = (b - a)$, falls $L = 0$, dann gilt $\sigma(f, P) < \varepsilon$. Daher erfüllt f das Riemannsche Integrabilitätskriterium.

(ii) Analog gilt für hölderstetige Funktionen

$$\operatorname{osc} f_i = \sup_{x,y \in I_i} |f(x) - f(y)| \leq H \cdot \sup_{x,y \in I_i} |x - y|^\alpha = H \cdot |I_i|^\alpha,$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha \leq 1$ und ein $H \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wählen wir eine Partition von I in äquidistante Teile (also gleichlange Teilintervalle $I_0, \ldots, I_{n-1}$), so erhalten wir

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc} f_i \cdot |I_i| \leq \sum_{i=0}^{n-1} H \cdot |I_i|^{1+\alpha} = \sum_{i=0}^{n-1} H \cdot \eta(P) \cdot |I_i|^\alpha = n \cdot H \cdot \eta(P) \cdot |I_0|^\alpha.$$

Wir haben nun

$$n \cdot H \cdot \eta(P) \cdot |I_0|^\alpha = n \cdot H \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)^\alpha = H(b-a)\left(\frac{b-a}{n}\right)^\alpha \to 0$$

für $n \to \infty$. Damit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\sigma(f, P) < \varepsilon$.

Aufgabe 5.2 (Riemann Integrabilität) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**

Welche der folgenden Funktionen sind Riemann integrabel?

(a) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$.

(b) $g\colon [0,2020] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [n, n+1), \quad n \text{ gerade}, \\ -1, & x \in [n, n+1), \quad n \text{ ungerade}. \end{cases}$

(c) $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

(Hinweis: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die beiden Intervalle $[0, \frac{\varepsilon}{4}]$ und $[\frac{\varepsilon}{4}, 1]$.)

(d) $v\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Lösung:

(a) f ist lipschitzstetig: Seien $x, y \in [a,b]$. Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass es ein $\xi \in (x,y)$ mit

$$\sin(x) - \sin(y) = \cos(\xi) \cdot (x - y)$$

gibt. Da $|\cos(\xi)| \leq 1$ für alle $\xi \in [a,b]$ gilt, erhält man

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq 1 \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in [a,b]$. Aufgabe 5.1 liefert nun die Integrabilität.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wir setzen $\delta = \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{\varepsilon}{8080}\right\}$ und betrachten die Partition, die aus den Teilintervallen

$$[0, 1-\delta], [1-\delta, 1+\delta], [1+\delta, 2-\delta], [2-\delta, 2+\delta], \ldots, [2019+\delta, 2020]$$

besteht. Für die Teilintervalle

$$J_0 = [0, 1-\delta], J_1 = [1+\delta, 2-\delta], \ldots, J_{2018} = [2018+\delta, 2019-\delta], J_{2019} = [2019+\delta, 2020]$$

gilt $\operatorname{osc} g|_{J_i} = 0$ für alle $i \in \{0, \ldots, 2019\}$. Die restlichen Teilintervalle $K_i = [i-\delta, i+\delta]$, für $i = 1, \ldots, 2019$, haben Länge 2δ und die Oszillation auf diesen ist $\operatorname{osc} g|_{K_i} = 2$. Es folgt

$$\sigma(g, P) = \sum_{i=0}^{2019} \operatorname{osc} g|_{J_i} \cdot |J_i| + \sum_{i=1}^{2019} \operatorname{osc} g|_{K_i} \cdot |K_i| = \sum_{i=1}^{2019} 2 \cdot 2\delta < 2020 \cdot 4\delta \leq \varepsilon.$$

Damit ist g integrabel.

(c) Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 4$. (Für $\varepsilon \geq 4$ haben wir bereits für die Partition $P = \{0, 1\}$, dass $\sigma(u, P) \leq 2 < \varepsilon$.) Auf $J = [\frac{\varepsilon}{4}, 1]$ ist u lipschitzstetig: Seien $x, y \in J$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz

$$|u(x) - u(y)| \leq \sup_{\xi \in J} |u'(\xi)||x - y| = \sup_{\xi \in J} \left|\cos\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot \frac{1}{\xi^2}\right| |x - y| = \frac{16}{\varepsilon^2}|x - y|.$$

Sei P' nun eine Partition von J, sodass $\sigma(u|_J, P') < \frac{\varepsilon}{2}$. Diese existiert nach Lemma 5.6 und Aufgabe 5.1. Sei $P = \{0\} \cup P'$. Wir erhalten

$$\sigma(u, P) = \operatorname{osc} u|_{[0, \frac{\varepsilon}{4}]} \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \sigma(u|_J, P') < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(d) Sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[-1,1]$. Da jedes Teilintervall I_i der Partition sowohl rationale als auch irrationale Zahlen enthalten muss, gilt $\operatorname{osc} v_i = 1$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Daher ist

$$\sigma(v, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc} v_i \cdot |I_i| = \sum_{i=0}^{n-1} |I_i| = 1.$$

Damit ist das Riemannsche Integrabilitätskriterium beispielsweise für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nicht erfüllt.

Aufgabe 5.3 (Riemannsches Integral) **[4 + 2* Punkte]**

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(i) Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und setze $g = f|_{[0,a]}$. Berechnen Sie

$$\int_0^a g(x)\,dx.$$

(ii)* Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und setze $h = f|_{[a,b]}$. Berechnen Sie

$$\int_a^b h(x)\,dx.$$

Lösung:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für alle $x, y \in [a,b]$:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)||x - y| = 2\max\{|a|, |b|\}|x - y|.$$

Damit ist $f|_{[a,b]}$ lipschitzstetig und somit nach Aufgabe 5.1 integrabel.

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir P_k als die Partition von $I = [0,a]$ in k äquidistante Teilintervalle, also $P_k = \{x_0, \ldots, x_k\}$ mit

$$x_i = \frac{ia}{k}$$

für alle $i = 0, \ldots, k$. Weiterhin definieren wir die Menge von Zwischenpunkten $Z_k = \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$ durch $\xi_i = x_i$ für alle $i = 0, \ldots, k-1$.

Wir erhalten

$$S(P_k, Z_k) = \sum_{i=0}^{k-1} g(\xi_i) \cdot |I_i| = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{ia}{k}\right)^2 \cdot \frac{a}{k} = \frac{a^3}{k^3} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} i^2.$$

Wir berechnen die Summe in einer Nebenrechnung: Wir erwarten, dass die Formel für die Summe

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2$$

(für $n > 0$) ein kubisches Polynom in n ist, also

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 = An^3 + Bn^2 + Cn + D.$$

Einsetzen liefert:

$n = 1$: $0 = A + B + C + D$.

$n = 2$: $1 = 8A + 4B + 2C + D$.

$n = 3$: $5 = 27A + 9B + 3C + D$.

$n = 4$: $14 = 64A + 16B + 4C + D$.

Wir erhalten als Lösung

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(2n^3 - 3n^2 + n\right).$$

Damit ist die Riemannsche Summe durch

$$S(P_k, Z_k) = \frac{a^3}{k^3} \cdot \sum_{i=0}^{k-1} i^2 = \frac{a^3}{k^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2k^3 - 3k^2 + k\right)$$

gegeben. Schließlich erhalten wir das Riemannsche Integral

$$\begin{aligned}\int_0^a g(x)\,dx &= \lim_{k\to\infty} S(P_k, Z_k)\\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{a^3}{k^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(2k^3 - 3k^2 + k\right)\\ &= a^3 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(2 - 3k^{-1} + k^{-2}\right)\\ &= \frac{1}{3}a^3.\end{aligned}$$

(ii) Wir könnten diesen Aufgabenteil wie (i) bearbeiten, zeigen hier jedoch die Anwendung einiger Resultate aus der Vorlesung.

Nach Proposition 5.13 gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx.$$

Falls $a \geq 0$, folgt aus Aufgabenteil (i) und Definition 5.12

$$\int_a^b h(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(-a^3 + b^3\right).$$

Falls $a < 0$, können wir wie in Aufgabenteil (i) vorgehen und erhalten aufgrund der Achsensymmetrie von f (d. h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$) das Integral

$$\int_a^0 x^2\,dx = \frac{-a^3}{3}.$$

Folglich ist

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^0 h(x)\,dx + \int_0^b h(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(-a^3 + b^3\right),$$

falls $b \geq 0$, und

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx - \int_b^0 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(-a^3 - (-b^3)\right),$$

falls $b < 0$.

In jedem Fall erhalten wir also

$$\int_a^b h(x)\,dx = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right).$$

Aufgabe 5.4 (Gleichmäßige Konvergenz) **[1 + 1 + 2 Punkte]**
Sei K ein kompakter metrischer Raum und sei $f_n\colon K \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, d. h. es gelte

$$f_n(x) \geq f_m(x)$$

für alle $x \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Sei ferner $g\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und konvergiere $(f_n)_n$ punktweise gegen g für $n \to \infty$.

(i) Sei $h_n = f_n - g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(h_n)_n$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen ist, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $A_n := h_n^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ eine offene Überdeckung von K ist.

(iii) Folgern Sie, dass $f_n \rightrightarrows g$ für $n \to \infty$ gilt.

Lösung: Diese Aufgabe ist eine Version vom Satz von Dini.

(i) Offensichtlich ist h_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Differenz zweier stetiger Funktionen stetig.

Wegen der Monotonie von $(f_n)_n$ erhalten wir

$$h_n(x) = f_n(x) - g(x) \geq f_m(x) - g(x) = h_m(x)$$

für alle $x \in K$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$. Somit ist $(h_n)_n$ monoton fallend.

Sei $x \in K$. Dann gilt $h_n(x) = f_n(x) - g(x) \to g(x) - g(x) = 0$ mit $n \to \infty$. Also konvergiert $(h_n)_n$ punktweise gegen die Nullfunktion.

(ii) Offensichtlich ist A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Urbild einer offenen Menge unter einer stetigen Funktion auch offen.

Sei $x \in K$. Da $h_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq N$ gilt

$$h_n(x) < \varepsilon.$$

Hieraus folgt schon $h_n(x) \in (-\infty, \varepsilon)$, also $x \in A_n$ für alle $n \geq N$. Dies zeigt, dass K in der Vereinigung aller A_n enthalten ist, womit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von K bildet.

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (definiert wie in (ii)) eine offene Überdeckung des kompakten Raumes K bildet, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$K = \bigcup_{k=0}^{N} A_n.$$

Sei $n \geq N$ und sei $x \in K$. Wir zeigen $|h_n(x)| < \varepsilon$. Aufgrund der Monotonie von $(h_n)_n$ wissen wir

$$h_n(x) \leq h_k(x) < \varepsilon,$$

für jedes $k \leq N$ mit $x \in A_k$. Wäre $h_n(x) < 0$, so erhielten wir wieder Aufgrund der Monotonie die Funktionenfolge, dass $h_m(x) \leq h_n(x) < 0$ für alle $m \geq n$, was im Widerspruch zu $h_m(x) \to 0$ mit $m \to \infty$ steht. Daher erhalten wir $0 \leq h_n(x) < \varepsilon$. Dies zeigt insbesondere $h_n \rightrightarrows 0$ für $n \to \infty$. Wenden wir die Supremumsnorm an, erhalten wir schließlich

$$\|f_n - g\|_{L^\infty} = \|h_n\|_{L^\infty} \to 0$$

für $n \to \infty$. Daraus folgt $f_n \rightrightarrows g$ für $n \to \infty$.

Abgabe: Bis **Freitag, 22. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.