O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 6

1	2	3	4	Σ

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Korollar 5.18 vorausgesetzt. Zudem darf für alle Aufgaben Proposition 5.25 ohne Beweis angenommen werden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Sei I stets ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabe 6.1 (Konvergenz der L^p-Norm) **[4 Punkte]**
Sei $f \in C^0(I)$. Für $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir nennen $\|\cdot\|_{L^p}$ die L^p-*Norm.*

Zeigen Sie: $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

(Hinweis: Sei $x_0 \in I$ mit $|f(x_0)| = \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$. Betrachten Sie f auf einer geeigneten Umgebung von x_0.)

Lösung:

Aufgabe 6.2 (L^1-Norm) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L^1}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0(I)$ definiert.
(Hierbei ist $\|\cdot\|_{L^1}$ wie in Aufgabe 6.1 für $p = 1$ definiert.)

(ii) Sei $w \in C^0(I)$. Zeigen Sie, dass
$$M\colon \ (C^0(I), \|\cdot\|_{L^1}) \to (C^0(I), \|\cdot\|_{L^1}), \quad v \mapsto w \cdot v$$
ein stetiger linearer Operator ist.

Lösung:

Aufgabe 6.3 (Höldersche und Minkowskische Ungleichung) **[2 + 2 Punkte]**
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugierte Exponenten mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien ferner $f, g \in C^0(I)$.
Zeigen Sie

$$\int_I |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

und

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

(Erinnerung: Beide Ungleichungen wurden in Theorem 2.15 für $\mathbb{R}^n$ bewiesen.)

Lösung:

Aufgabe 6.4 (Ableitung und gleichmäßige Konvergenz) **[2 + 2 + 2* Punkte]**

(a) Sei die Funktionsfolge $(g_n)_n$ für $n > 0$ durch

$$g_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(i) $(g_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine nicht differenzierbare Funktion g.

(ii) $(g'_n)_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion v.

(b) Sei die Funktionsfolge $(f_n)_n$ durch

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(i) $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion f.

(ii) $(f'_n)_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion u.

(iii) $f' \neq u$.

(c)* Zeichnen Sie aussagekräftige Bilder zu den angegebenen Beispielen.

(Vergleichen Sie die in dieser Aufgabe gewonnenen Erkenntnisse mit Theorem 4.47.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 29. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.