O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

**Übungen zur Vorlesung Analysis II**
**Blatt 6**

**Abgabe von:** Musterstudent
**Tutor(in):** Mein Lieblingstutor

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 4 | 6 | 18 |

**Allgemeiner Hinweis:** Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Korollar 5.18 vorausgesetzt. Zudem darf für alle Aufgaben Proposition 5.25 ohne Beweis angenommen werden. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Sei $I$ stets ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$.

**Aufgabe 6.1** (Konvergenz der $L^p$-Norm) **[4 Punkte]**
Sei $f \in C^0(I)$. Für $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir nennen $\|\cdot\|_{L^p}$ die *$L^p$-Norm.*

Zeigen Sie: $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

*(Hinweis: Sei $x_0 \in I$ mit $|f(x_0)| = \sup\limits_{x\in I}|f(x)|$. Betrachten Sie $f$ auf einer geeigneten Umgebung von $x_0$.)*

**Lösung:** Wir zeigen

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty},$$

woraus schon die Behauptung folgt.
Da für alle $p \in [1,\infty)$ gilt $|f|^p \leq \|f\|_{L^\infty}^p$, erhalten wir mit dem Mittelwertsatz

$$\int_a^b |f|^p \leq \|f\|_{L^\infty}^p (b-a).$$

Daraus folgt schon

$$\varlimsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \leq \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^\infty} (b-a)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Hierbei wurde verwendet, dass für alle $\alpha \in (0,\infty)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1,$$

da für genügend große $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \alpha^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}}$$

und die Ausdrücke links und rechts nach Lemma 4.50 beide gegen 1 konvergieren.

Sei für die andere Ungleichung $x_0 \in I$ mit $|f(x_0)| = \|f\|_{L^\infty}$. Sei $r \in (0,1)$ beliebig. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f$ eine Umgebung $B_\delta(x_0) \subset I$ von $x_0$ (mit $\delta > 0$), sodass für alle $y \in B_\delta(x_0)$ gilt

$$|f(y)| \geq r \|f\|_{L^\infty}.$$

Seien $d = \sup B_\delta(x_0)$ und $c = \inf B_\delta(x_0)$ (also $B_\delta(x_0) \subset [c,d] \subset [a,b]$). Dann erhalten wir mit Proposition 5.13 und dem Mittelwertsatz

$$\int_a^b |f|^p \geq \int_c^d |f|^p \geq \inf_{x\in[c,d]} |f(x)|^p (d-c) \geq r^p \|f\|_{L^\infty}^p (d-c).$$

Daraus folgt

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \lim_{p\to\infty} r \|f\|_{L^\infty} (d-c)^{\frac{1}{p}} = r \|f\|_{L^\infty}.$$

Da dies für alle $r \in (0,1)$ gilt, erhalten wir mit $r \to 1$

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty}.$$

**Aufgabe 6.2** ($L^1$-Norm) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L^1}$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $C^0(I)$ definiert.
*(Hierbei ist $\|\cdot\|_{L^1}$ wie in Aufgabe 6.1 für $p = 1$ definiert.)*

(ii) Sei $w \in C^0(I)$. Zeigen Sie, dass

$$M\colon\ (C^0(I), \|\cdot\|_{L^1}) \to (C^0(I), \|\cdot\|_{L^1}),\quad v \mapsto w\cdot v$$

ein stetiger linearer Operator ist.

**Lösung:**

(i) *Positive Definitheit:* Sei $f \in C^0(I)\setminus\{0\}$ und sei $x_0 \in I$ mit $|f(x_0)| = \|f\|_{L^\infty}$. Dann gibt es eine Umgebung $B_\delta(x_0) \subset I$ (mit $\delta > 0$), sodass für alle $y \in B_\delta(x_0)$ gilt:

$$|f(y)| \geq \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2}.$$

Seien $c = \inf B_\delta(x_0)$ und $d = \sup B_\delta(x_0)$. Dann haben wir $[c,d] \subset [a,b]$ und daher mit Proposition 5.13 und dem Mittelwertsatz

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f| = \int_a^c |f| + \int_c^d |f| + \int_d^b |f| \geq \int_c^d |f| \geq \frac{\|f\|_{L^\infty}(d-c)}{2} > 0.$$

*Homogenität und Dreiecksungleichung:* Seien $f, g \in C^0(I)$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir erhalten mit Proposition 5.18 und Proposition 5.15

$$\|\lambda f\|_{L^1} = \int_I |\lambda||f| = |\lambda| \int_I |f| = |\lambda| \|f\|_{L^1}$$

und

$$\|f+g\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

(ii) *Linearität:* Seien $v, u \in C^0(I)$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann haben wir

$$M(v + \lambda u) = w \cdot (v + \lambda u) = wv + \lambda wu = M(v) + \lambda M(u).$$

*Stetigkeit:* Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir für alle $v \in C^0(I)$:

$$\|Mv\|_{L^1} = \int_I |wv| \leq \|w\|_{L^\infty} \int_I |v| = \|w\|_{L^\infty} \cdot \|v\|_{L^1}.$$

Nach Proposition 3.109 ist $M$ also stetig.

**Aufgabe 6.3** (Höldersche und Minkowskische Ungleichung) **[2 + 2 Punkte]**
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugierte Exponenten mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Seien ferner $f, g \in C^0(I)$.
Zeigen Sie

$$\int_I |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

und

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

*(Erinnerung: Beide Ungleichungen wurden in Theorem 2.15 für $\mathbb{R}^n$ bewiesen.)*

**Lösung:** Wir zeigen zunächst den Fall, dass einer der konjugierten Exponenten gleich $\infty$ (und der andere gleich 1) ist: Wir haben

$$\int_I |fg| \leq \|f\|_{L^\infty} \int_I |g| = \|f\|_{L^\infty} \cdot \|g\|_{L^1}$$

nach dem Mittelwertsatz. Die Mikowskische Ungleichung für $p = 1$ wurde in Aufgabe 6.2 (i) gezeigt. Für $p = \infty$ haben wir

$$\|f + g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in I} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)| = \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

Wir beweisen nun den Fall $p, q \neq \infty$.
Für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die Partition

$$P = \left\{a, a + \frac{b-a}{k}, a + \frac{2(b-a)}{k}, \ldots, a + \frac{(k-1)(b-a)}{k}, b\right\}$$

von $I$ in $k$ äquidistante Teilintervalle der Länge $\frac{b-a}{k}$. Sei weiterhin

$$Z_k = \left\{a + \frac{i(b-a)}{k} : 0 \leq i \leq k-1\right\}$$

(also eine Menge von Zwischenpunkten $\xi_k = a + \frac{i(b-a)}{k}$ bezüglich der Partition $P_k$).

Wir erhalten mit Theorem 2.15:

$$\begin{aligned}
\int_I |f \cdot g| &= \lim_{k\to\infty} S(|fg|, P_k, Z_k) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} |f(\xi_i)| \cdot |g(\xi_i)| \cdot \frac{b-a}{k} \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |f(\xi_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} |g(\xi_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\frac{b-a}{k}\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |f(\xi_i)|^p \left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |g(\xi_i)|^q \left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_I |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}\,.
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^p} &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |f(\xi_i) + g(\xi_i)|^p \cdot \left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} |f(\xi_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} |g(\xi_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\frac{b-a}{k}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} |f(\xi_i)|^p \left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=0}^{k-1} |g(\xi_i)|^p \left(\frac{b-a}{k}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&= \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\,.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6.4** (Ableitung und gleichmäßige Konvergenz) **[2 + 2 + 2* Punkte]**

(a) Sei die Funktionsfolge $(g_n)_n$ für $n > 0$ durch

$$g_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(i) $(g_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine nicht differenzierbare Funktion $g$.

(ii) $(g_n')_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $v$.

(b) Sei die Funktionsfolge $(f_n)_n$ durch

$$f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(i) $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetig differenzierbare Funktion $f$.

(ii) $(f_n')_n$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $u$.

(iii) $f' \neq u$.

(c)* Zeichnen Sie aussagekräftige Bilder zu den angegebenen Beispielen.

*(Vergleichen Sie die in dieser Aufgabe gewonnenen Erkenntnisse mit Theorem 4.47.)*

**Lösung:**

(a) (i) Da $(g_n)_n$ monotn fallend ist (sehr leicht zu zeigen) genügt es mit dem Satz von Dini (Aufgabe 5.4) zu zeigen, dass sie punktweise konvergiert. Sei hierfür $x \in [-1, 1]$. Dann gilt

$$g_n(x) \to \sqrt{x^2} = |x|$$

mit $n \to \infty$. Wir haben also $g(x) = |x|$, was nicht in 0 differenzierbar ist.

(ii)

$$g_n'(x) = \frac{x}{\left(\frac{1}{n} + x^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Funktionenfolge $(g_n')_n$ konvergiert also punktweise gegen die Funktion $v$ mit $v(x) = \frac{x}{|x|}$ für $x \neq 0$ und $v(0) = 0$.

(b) (i) Es gilt

$$f_n(x) \to 0$$

mit $n \to \infty$ (klar für $x = 0$ und für $x \neq 0$ ist der Nenner unbeschänkt). Damit haben wir $f_n \to 0 = f$ für $n \to \infty$. Wir müssen nun noch gleichmäßige Konvergenz zeigen. Dazu genügt schon $\|f_n\|_{L^\infty} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir haben

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = 0$$

für $x = \pm\frac{1}{n}$. Damit erhalten wir aufgrund der Achsensymmetrie von $f_n$

$$\|f_n\|_{L^\infty} = \max\{|f_n(1)|, |f_n(1/n)|\}.$$

Mit

$$f_n(1) = \frac{1}{1 + n^2} \to 0$$

und

$$f_n(1/n) = \frac{1}{2n} \to 0$$

für $n \to \infty$ erhalten wir das erwünschte Ergebnis.

(ii)

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Wir erhalten $f_n'(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n^{-4} - x^2n^{-2}}{(n^{-2} + x^2)^2} \to 0$$

für $n \to \infty$. Damit ist $u(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $u(0) = 1$.

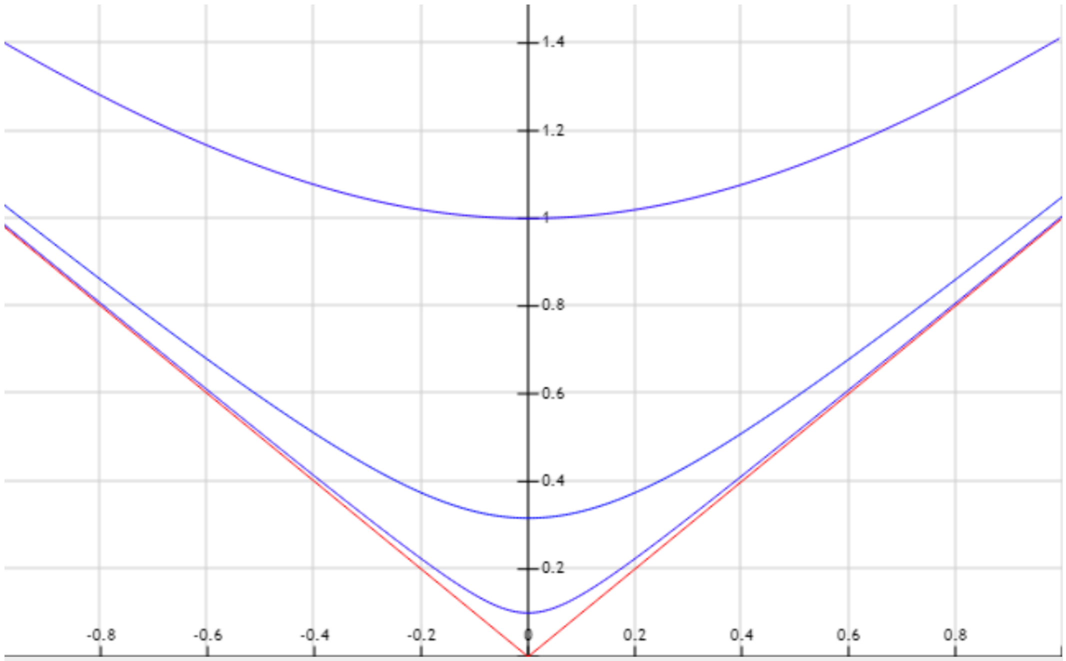
(iii) $f' \neq u$, da $u \neq 0$.

(c) $g_1(x) = \sqrt{1+x^2}$,

$g_{10}(x) = \sqrt{\frac{1}{10}x^2}$,

$g_{100}(x) = \sqrt{\frac{1}{100} + x^2}$,

$g(x) = |x|$.

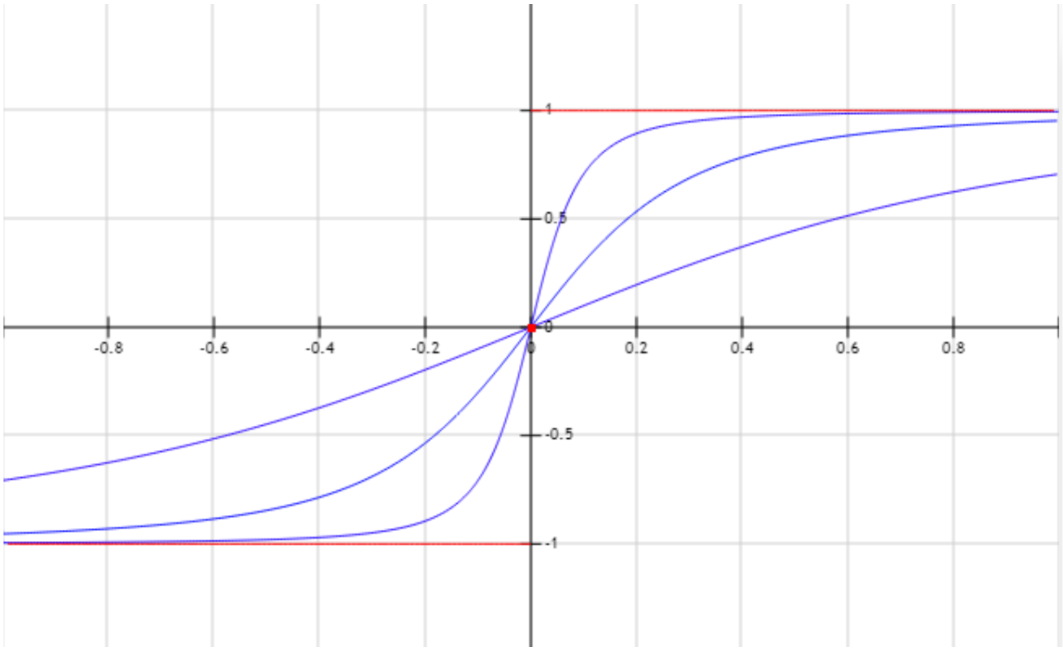



$g_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

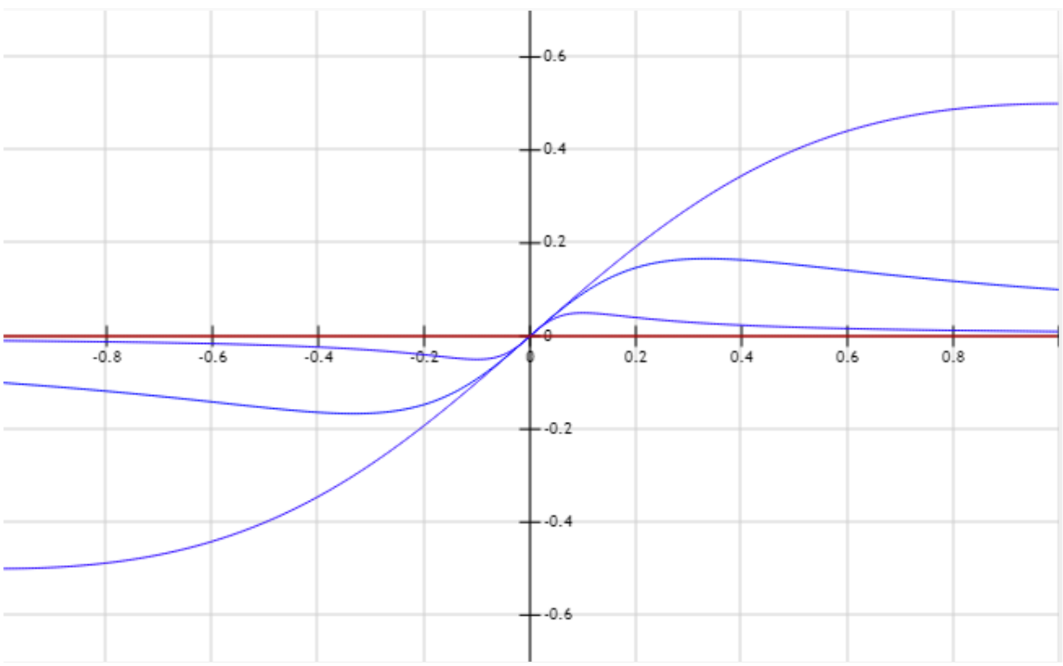
$g_{10}'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{10}+x^2}}$,

$g_{100}'(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{100}+x^2}}$,

$$v(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$




$f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
$f_3(x) = \frac{x}{1+9x^2}$,
$f_{10}(x) = \frac{x}{1+100x^2}$,
$f(x) = 0$.

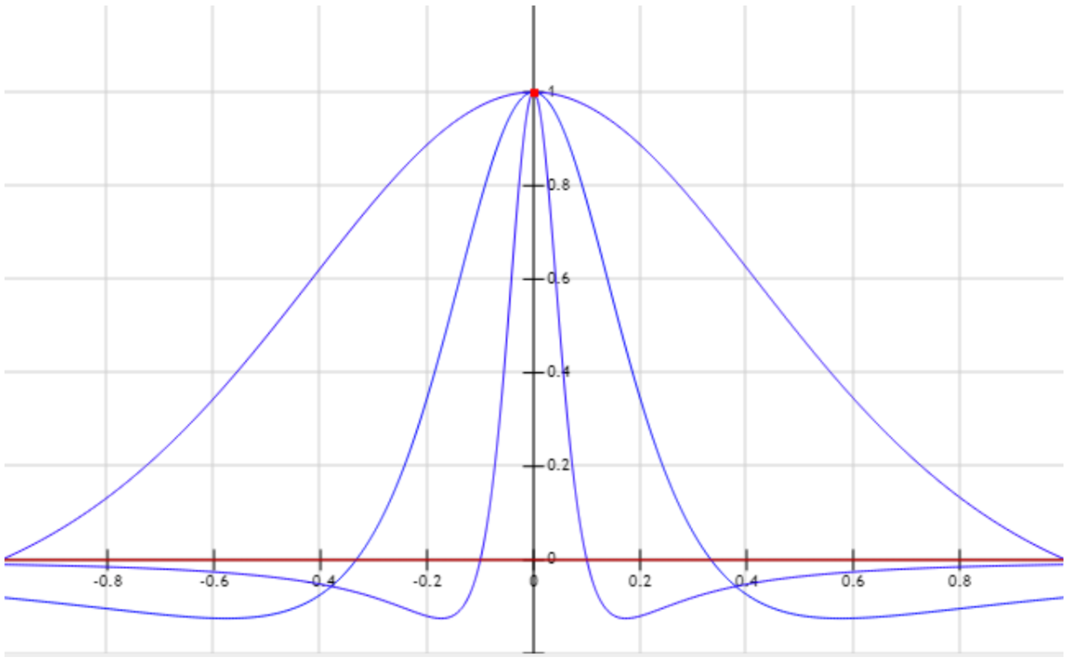



$f_1'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

$f_3'(x) = \frac{1-x^2}{(1+9x^2)^2}$,

$f'_{10}(x) = \frac{1-x^2}{(1+100x^2)^2}$,

$u(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$




**Abgabe:** Bis **Freitag, 29. Mai 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.