O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 8

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Definition 5.71 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 8.1 (Interpolationsungleichung) **[4 Punkte]**
Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ eine beschränkte Funktion mit beschränkter zweiter Ableitung. Zeigen Sie, dass

$$\|\varphi'\|_{L^\infty}^2 \leq 4 \|\varphi''\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^\infty}$$

gilt.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $\varphi \geq 0$ und wenden Sie Lemma 4.100 auf $\varphi(x+t)$ an.)

Lösung:

Aufgabe 8.2 (L^p-Norm II) **[2 + 2 + 2* + 2* + 2* Punkte]**
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $p \in [1, \infty)$.

(a) Sei $f \in R([a,b], \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $T\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die
$$\|f - T\|_{L^p} < \varepsilon$$
erfüllt.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die
$$\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$$
erfüllt.

(iii)* Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $h \in C_c^\infty((a,b))$, am Rand durch Null fortgesetzt, das
$$\|f - h\|_{L^p} < \varepsilon$$
erfüllt.
(Dies bedeutet, dass die glatten Funktionen mit kompaktem Träger bezüglich der L^p-Norm dicht im Raum $L^p([a,b])$ der Riemann integrierbaren Funktionen mit endlicher L^p-Norm liegen.)

(b) Sei $q \in [1, \infty]$ mit $q \neq p$. Zeigen Sie:

(i)* Es gibt ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $f \in R([a,b], \mathbb{R})$ je eine der Ungleichungen
$$\|f\|_{L^p} \leq c \|f\|_{L^q} \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^q} \leq c \|f\|_{L^p}$$
erfüllt ist.

(ii)* Die Normen $\|.\|_{L^p}$ und $\|.\|_{L^q}$ sind auf $R([a,b], \mathbb{R})$ nicht äquivalent.

Lösung:

Aufgabe 8.3 (Glättungskern) **[4 Punkte]**

Eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ heißt *Glättungskern*, falls

$$\operatorname{supp} \eta \subset [-1,1] \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{1} \eta = 1$$

gelten.

Sei

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $p_n(x) \in P(\mathbb{R})$ (also ein Polynom mit reellen Koeffizienten), sodass

$$g^{(n)}(a) = \frac{p_n(a)}{(a^2-1)^{2n}} \cdot g(a)$$

für alle $a \in (-1,1)$ gilt.

(ii) Die Funktion g ist unendlich oft differenzierbar.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $g^{(n)}(1) = g^{(n)}(-1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und überlegen Sie sich vorab, welche Teilschritte Sie zeigen müssen, um $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ folgern zu können.)

(iii) Es gibt ein $c \in (1,4)$, sodass $j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cg(x)$ einen Glättungskern bildet.

Lösung:

Aufgabe 8.4 (Glättung) **[2 + 2 + 1* + 1* + 1* + 2* Punkte]**

Sei η ein Glättungskern. Seien ferner $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f \in R([a,b], \mathbb{R})$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \eta\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{und} \quad f_\varepsilon(x) := \int_a^b \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass f_ε unendlich oft differenzierbar ist.

(ii) Sei f in $x_0 \in (a,b)$ stetig. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x_0) = f(x_0)$ gilt.

(iii)* Sei $f \in R([a,b], \mathbb{R})$ nun zusätzlich stetig. Zeigen Sie, dass für alle $\Omega \Subset (a,b)$ die gleichmäßige Konvergenz $\|f_\varepsilon - f\|_{C^0(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ gilt.

(iv)* Sei $f \in R([a,b], \mathbb{R}) \cap C^1((a,b))$. Zeigen Sie für $x \in (a,b)$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \{a,b\})$, dass $(f')_\varepsilon(x) = (f_\varepsilon)'(x)$ gilt.

(v)* Folgern Sie, dass für $f \in R([a,b], \mathbb{R}) \cap C^k([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$, und $\Omega \Subset (a,b)$ die Konvergenz $\|f_\varepsilon - f\|_{C^k(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ richtig ist.

(vi)* Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$. Zeigen Sie, dass $f_\varepsilon \rightrightarrows 0$ für $\varepsilon \to \infty$ gilt.

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 12. Juni 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.