Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 8

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ
4	10	4	9	27

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Definition 5.71 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 8.1 (Interpolationsungleichung) **[4 Punkte]**
Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ eine beschränkte Funktion mit beschränkter zweiter Ableitung. Zeigen Sie, dass

$$\|\varphi'\|_{L^\infty}^2 \le 4\,\|\varphi''\|_{L^\infty}\,\|\varphi\|_{L^\infty}$$

gilt.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $\varphi \ge 0$ und wenden Sie Lemma 4.100 auf $\varphi(x+t)$ an.)

Lösung: Sei

$$u(x) = \varphi(x) + \inf_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|.$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar mit $u' = \varphi'$ und erfüllt $u \ge 0$. Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir wenden nun Lemma 4.100 auf $u(x+t)$ für $t \in \mathbb{R}$ an und erhalten mit dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned}
0 &\le u(x+t)\\
&= u(x) + tu'(x) + \int_x^{x+t} (x+t-\tau)u''(\tau)\,d\tau\\
&\le u(x) + tu'(x) + \|u''\|_{L^\infty} \int_x^{x+t} (x+t-\tau)\,d\tau\\
&= u(x) + tu'(x) + \|u''\|_{L^\infty} \left[(x+t)\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right]_{\tau=x}^{\tau=x+t}\\
&= u(x) + u'(x)t + \frac{\|u''\|_{L^\infty}}{2}t^2.
\end{aligned}$$

Wir haben also $At^2 + Bt + C \ge 0$ für alle t, wobei $A = \frac{\|u''\|_{L^\infty}}{2}$, $B = u'(x)$ und $C = u(x)$. Hieraus folgt mit der Diskriminante eines quadratischen Polynoms:[1]

$$B^2 \le 4AC,$$

also

$$(u'(x))^2 \le 2\,\|u''\|_{L^\infty}\,u(x).$$

[1] Die Diskriminante einer nach oben geöffneten Parabel ist genau dann positiv, wenn die Parabel zwei Nullstellen besitzt, also wenn sie in mindestens einem Punkt negativ wird. Siehe hierzu die allgemeine Lösungsformel quadratischer Gleichungen.

Da diese Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir mit einer letzten Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|\varphi'\|_{L^\infty}^2 &= \|u'\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq 2\,\|u''\|_{L^\infty}\,\|u\|_{L^\infty} \\
&= 2\,\|\varphi''\|_{L^\infty}\left\|\varphi + \inf_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\right\|_{L^\infty} \\
&\leq 2\,\|\varphi''\|_{L^\infty}\left(\|\varphi\|_{L^\infty} + \inf_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\right) \\
&\leq 2\,\|\varphi''\|_{L^\infty}\,(2\,\|\varphi\|_{L^\infty}) \\
&= 4\,\|\varphi''\|_{L^\infty}\,\|\varphi\|_{L^\infty}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.2 (L^p-Norm II) **[2 + 2 + 2* + 2* + 2* Punkte]**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $p \in [1, \infty)$.

(a) Sei $f \in R([a,b],\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $T\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die

$$\|f - T\|_{L^p} < \varepsilon$$

erfüllt.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die

$$\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$$

erfüllt.

(iii)* Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $h \in C_c^\infty((a,b))$, am Rand durch Null fortgesetzt, das

$$\|f - h\|_{L^p} < \varepsilon$$

erfüllt.

(Dies bedeutet, dass die glatten Funktionen mit kompaktem Träger bezüglich der L^p-Norm dicht im Raum $L^p([a,b])$ der Riemann integrierbaren Funktionen mit endlicher L^p-Norm liegen.)

(b) Sei $q \in [1, \infty]$ mit $q \neq p$. Zeigen Sie:

(i)* Es gibt ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass für alle $f \in R([a,b],\mathbb{R})$ je eine der Ungleichungen

$$\|f\|_{L^p} \leq c\,\|f\|_{L^q} \quad \text{und} \quad \|f\|_{L^q} \leq c\,\|f\|_{L^p}$$

erfüllt ist.

(ii)* Die Normen $\|.\|_{L^p}$ und $\|.\|_{L^q}$ sind auf $R([a,b],\mathbb{R})$ nicht äquivalent.

Lösung:

(a) Beide Aussagen sind trivial für $f = 0$. Wir nehmen also $f \neq 0$ an.

Sei $\delta > 0$ und sei $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ mit $\sigma(f, P) < \delta$.

(i) Setze

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\chi_{[x_i,x_{i+1})} + f(x_n)\chi_{\{x_n\}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|f - T\|_{L^p} &= \left(\int_a^b |f(t) - T(t)|^p \; dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - f(x_i)|^p \; dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\operatorname{osc} f_i|^p \; dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\operatorname{osc} f_i|^p \, |I_i|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} |\operatorname{osc} f_i| \, (2 \|f\|_{L^\infty})^{p-1} |I_i|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2 \|f\|_{L^\infty})^{\frac{p-1}{p}} (\sigma(f, P))^{\frac{1}{p}} \\
&< (2 \|f\|_{L^\infty})^{\frac{p-1}{p}} \cdot \delta^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Mit

$$\delta = \left(\varepsilon \cdot (2 \|f\|_{L^\infty})^{\frac{1-p}{p}}\right)^p$$

erhalten wir das erwünschte Ergebnis.

(ii) Sei $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ der Polygonzug, der durch

$$g(t) = m_i(t - x_i) + f(x_i)$$

für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $t \in [x_i, x_{i+1}]$ und $m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ gegeben ist.

g ist wohldefiniert und stetig: Offensichtlich ist g auf (x_i, x_{i+1}) für $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ wohldefiniert und stetig. Einfaches Nachrechnen zeigt

$$m_i(x_{i+1} - x_i) + f(x_i) = f(x_{i+1}) = m_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + f(x_{i+1})$$

für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dies zeigt, dass g auch an den Partitionierungsstellen wohldefiniert und stetig ist.

Nach Definition von g haben wir $\min\{f(x_i), f(x_{i+1})\} \leq g(t) \leq \max\{f(x_i), f(x_{i+1})\}$ und daher $|f_i(t) - g_i(t)| \leq \operatorname{osc} f$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ und alle $t \in I_i$. Wir können nun ähnlich wie in Teil (i) vorgehen:

$$
\begin{aligned}
\|f-g\|_{L^p} &= \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)-g(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\operatorname{osc} f_i|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&< (2\|f\|_{L^\infty})^{\frac{p-1}{p}} \cdot \delta^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

(iii) Sei $\delta > 0$. Wir gehen in mehreren Schritten vor und verwenden die Ergebnisse der Aufgaben 8.3, 8.4 und 6.1.

1. Sei $M = |a| + |b| + 1$. Dann gilt $[a,b] \subsetneq [-M,M]$. Wir setzen f auf $[-M,M]$ fort, indem wir es für $x \notin [a,b]$ gleich 0 setzen. Dann ist $f \in R([-M,M],\mathbb{R})$.

2. Mit Aufgabenteil (ii) finden wir eine stetige Funktion g mit

$$\|f-g\|_{L^p} < \delta.$$

3. Sei für $\varepsilon' > 0$ die Glättung $g_{\varepsilon'}$ wie in Aufgabe 8.4 mit $\eta = j$ aus Aufgabe 8.3 definiert.

4. Mit Aufgabe 8.4 (iii) erhalten wir ein $\varepsilon' > 0$ mit

$$\|g_{\varepsilon'} - g\|_{L^\infty([a,b])} < \delta.$$

Setze $h = g_{\varepsilon'}$. Dies ist nach Aufgabe 8.4 (i) unendlich oft differenzierbar.

5. Wir schränken nun f, g und h wieder auf das Intervall $[a,b]$ ein.

6. Nach der Lösung von Aufgabe 6.1 gilt

$$\|g-h\|_{L^p} \leq c\,\|g-h\|_{L^\infty}$$

für ein $c > 0$, das nur von p und M abhängt.

7. Insgesamt erhalten wir

$$\|f-h\|_{L^p} \leq \|f-g\|_{L^p} + \|g-h\|_{L^p} < \delta + c\delta.$$

Da c nur von p und a, b abhängt, können wir δ nun so wählen, dass $\delta + c\delta < \varepsilon$ gilt.

(b) (i) Fall 1: $q < p$. Setze

$$c = (b-a)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Wir verwenden die Höldersche Ungleichung mit Exponenten $1 < \frac{p}{q}, \frac{p}{p-q} < \infty$. Es gilt

$$\frac{q}{p} + \frac{p-q}{p} = 1,$$

es handelt sich also um gültige Exponenten.

$$\int_a^b 1 \cdot |f|^q \leq \left(\int_a^b |1|^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\int_a^b (|f|^q)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} = (b-a)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{L^p}^q.$$

Durch potenzieren mit $\frac{1}{q}$ erhalten wir die zweite Ungleichung.

Fall 2: $p < q < \infty$. Wir können analog zu Fall 1 argumentieren, wobei

$$c = (b-a)^{\frac{q-p}{pq}},$$

und erhalten die erste Ungleichung.
Fall 3: $q = \infty$. Es gilt

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \|f\|_{L^\infty}^p\right)^{\frac{1}{p}} = (b-a)^{\frac{1}{p}} \, \|f\|_{L^\infty}\,.$$

(ii) Fall 1: $q < p$. Nehme an es gibt $c > 0$ mit $\|f\|_{L^p} \leq c\,\|f\|_{L^q}$ für alle $f \in R([a,b])$. Betrachte für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n := n\,\chi_{[a,a+n^{-p}]}.$$

Es gilt

$$1 = \left(n^{-p}n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|f_n\|_{L^p} \leq c\,\|f_n\|_{L^q} = \left(n^{-p}\,n^q\right)^{\frac{1}{q}} = n^{-\left(\frac{p}{q}-1\right)} \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

ein Widerspruch.
Fall 2: $p < q < \infty$. Analog zu Fall 1.
Fall 3: $q = \infty$. Mit f_n wie gerade gilt $\|f_n\|_{L^p} = 1$ und $\|f_n\|_{L^\infty} = n$. Eine Ungleichung der Form $\|f\|_{L^\infty} \leq c\,\|f\|_{L^p}$ kann es also nicht geben.

Aufgabe 8.3 (Glättungskern) **[4 Punkte]**
Eine Funktion $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ heißt *Glättungskern*, falls

$$\operatorname{supp}\eta \subset [-1,1] \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{1} \eta = 1$$

gelten.
Sei

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $p_n(x) \in P(\mathbb{R})$ (also ein Polynom mit reellen Koeffizienten), sodass

$$g^{(n)}(a) = \frac{p_n(a)}{(a^2-1)^{2n}} \cdot g(a)$$

für alle $a \in (-1,1)$ gilt.

(ii) Die funktion g ist unendlich oft differenzierbar.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $g^{(n)}(1) = g^{(n)}(-1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und überlegen Sie sich vorab, welche Teilschritte Sie zeigen müssen, um $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ folgern zu können.)

(iii) Es gibt ein $c \in (1,4)$, sodass $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cg(x)$ einen Glättungskern bildet.

Lösung:

(i) Beweis per Induktion: Die Aussage ist klar für $n = 0$. Angenommen für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Aussage bereits. Wir erhalten für $x \in (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \left(\frac{p_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \cdot \frac{-2x}{(x^2-1)^2} + \frac{p_n'(x)}{(x^2-1)^{2n}} + \frac{-4np_n(x)x}{(x^2-1)^{2n+1}} \right) g(x) \\ &= \frac{-2xp_n(x) + p_n'(x)(x^2-1)^2 - 4np_n(x)x(x^2-1)}{(x^2-1)^{2(n+1)}} \cdot g(x), \end{aligned}$$

was von der gewünschten Form ist.

(ii) Auf der offenen Menge $\Omega = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ ist g konstant 0. Daher gilt für alle $x \in \Omega$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$g^{(n)}(0) = 0.$$

Auf dem Intervall $(-1, 1)$ wurde bereits in (i) bewiesen, dass g unendlich oft differenzierbar ist.

Wir zeigen nun per Induktion, dass $g^{(n)}(1) = g^{(n)}(-1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies ist klar für $n = 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$ also beliebig, aber fest, und nehme an, dass die Aussage für n bereits bewiesen ist. Wir erhalten mit der Substitution $t = (x^2 - 1)^{-1}$ und Proposition 4.63

$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{g^{(n)}(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{0 - 0}{x - 1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 1} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(1)}{x - 1} &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{\frac{p_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \exp((x^2-1)^{-1})}{x - 1} \\ &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{p_n(x)(x+1)}{(x^2-1)^{2n}(x^2-1)} \exp((x^2-1)^{-1}) \\ &= 2p_n(1) \lim_{t \to -\infty} t^{2n+1} \exp(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $g^{(n+1)}(1) = 0$, sowie

$$\lim_{x \uparrow -1} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(-1)}{x + 1} = \lim_{x \uparrow -1} \frac{0 - 0}{x + 1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow -1} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \downarrow -1} \frac{\frac{p_n(x)}{(x^2-1)^{2n}} \exp((x^2-1)^{-1})}{x + 1} \\ &= \lim_{x \downarrow -1} \frac{p_n(x)(x-1)}{(x^2-1)^{2n}(x^2-1)} \exp((x^2-1)^{-1}) \\ &= -2p_n(-1) \lim_{t \to -\infty} t^{2n+1} \exp(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $g^{(n+1)}(-1) = 0$.

(iii) Da g auf $[-1, 1]$ stetig ist gilt $g|_{[-1,1]} \in R([-1, 1], \mathbb{R})$. Setze

$$c = \frac{1}{\int_{-1}^{1} g(x)\, dx.}$$

Dann sind nach Aufgabenteil (ii) schon $j \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp} j \subset [-1,1]$ erfüllt. Weiterhin gilt

$$\int_{-1}^{1} j = c \int_{-1}^{1} g = 1.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $1 < c < 4$, also

$$\frac{1}{4} < \int_{-1}^{1} g < 1.$$

Für die Abschätzung nach oben haben wir

$$\int_{-1}^{1} g \leq 2 \|g\|_{L^\infty([-1,1])} = 2g(0) = 2e^{-1} < 1,$$

da $2 < e$. (Dass $g(0) = \|g\|_{L^\infty([-1,1])}$ folgt aus $g'(0) = 0$ und der Tatsache, dass g in -1 und 1 sein Minimum annimmt.) Für die Abschätzung nach unten haben wir

$$\int_{-1}^{1} g \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g \geq \inf \left| g|_{[-1/2,1/2]} \right| = g(\tfrac{1}{2}) = e^{-\frac{4}{3}} > \frac{1}{4},$$

da $e^4 < 2{,}8^4 < 4^3$. (Dass $g(\frac{1}{2}) = \inf \left| g|_{[-1/2,1/2]} \right|$ folgt aus der Tatsache, dass g auf dem kompakten Intervall $[-1/2, 1/2]$ sein Minimum an den Randpunkten annimmt.)

Aufgabe 8.4 (Glättung) **[2 + 2 + 1* + 1* + 1* + 2* Punkte]**

Sei η ein Glättungskern. Seien ferner $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f \in R([a,b],\mathbb{R})$. Für $\varepsilon > 0$ definieren wir für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1} \eta\left(\tfrac{x}{\varepsilon}\right) \quad \text{und} \quad f_\varepsilon(x) := \int_a^b \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt.$$

(i) Zeigen Sie, dass f_ε unendlich oft differenzierbar ist.

(ii) Sei f in $x_0 \in (a,b)$ stetig. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x_0) = f(x_0)$ gilt.

(iii)* Sei $f \in R([a,b],\mathbb{R})$ nun zusätzlich stetig. Zeigen Sie, dass für alle $\Omega \Subset (a,b)$ die gleichmäßige Konvergenz $\|f_\varepsilon - f\|_{C^0(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ gilt.

(iv)* Sei $f \in R([a,b],\mathbb{R}) \cap C^1((a,b))$. Zeigen Sie für $x \in (a,b)$ und $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(x, \{a,b\})$, dass $(f')_\varepsilon(x) = (f_\varepsilon)'(x)$ gilt.

(v)* Folgern Sie, dass für $f \in R([a,b],\mathbb{R}) \cap C^k([a,b])$, $k \in \mathbb{N}$, und $\Omega \Subset (a,b)$ die Konvergenz $\|f_\varepsilon - f\|_{C^k(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ richtig ist.

(vi)* Sei $f \in C^0(\mathbb{R})$ mit $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$. Zeigen Sie, dass $f_\varepsilon \rightrightarrows 0$ für $\varepsilon \to \infty$ gilt.

Lösung:

(i) Bemerke zunächst, dass η_ε unendlich oft differenzierbar ist. Wir zeigen per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \int_a^b \eta_\varepsilon^{(n)}(x-t) f(t)\, dt.$$

Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage bereits für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Setze $F = f_\varepsilon^{(n)}$ und $g(t,x) = \eta_\varepsilon^{(n)}(x-t) f(t)$ für alle $t \in [a,b]$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist nun

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\, dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir gehen wie im Beweis von Theorem 5.72 vor.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_0)\, dt = \int_a^b \left(\frac{g(t,x) - g(t,x_0)}{x - x_0} - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_0) \right) dt =: I.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \int_a^b \left| g(t,x) - g(t,x_0) - \frac{\partial g}{\partial x}(t,x_0) \cdot (x - x_0) \right| dt \cdot \frac{1}{|x - x_0|} \\
&= \int_a^b \left| \left(\eta_\varepsilon^{(n)}(x - t) - \eta_\varepsilon^{(n)}(x_0 - t) \right) f(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(t,x_0) \cdot (x - x_0) \right| dt \cdot \frac{1}{|x - x_0|} \\
&\leq \int_a^b \sup_{\xi \in [x_0, x]} \left| \eta_\varepsilon^{(n+1)}(\xi - t) f(t) - \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_0) \right| dt \\
&= \int_a^b \sup_{\xi \in [x_0, x]} \left| \eta_\varepsilon^{(n+1)}(\xi - t) - \eta_\varepsilon^{(n+1)}(x_0 - t) \right| |f(t)|\, dt \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \int_a^b \sup_{\xi \in [x_0, x]} \left| \eta_\varepsilon^{(n+1)}(\xi - t) - \eta_\varepsilon^{(n+1)}(x_0 - t) \right| dt.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von η_ε konvergiert die rechte Seite mit $x \to x_0$ gegen 0. Wir erhalten mit

$$\lim_{x \to x_0} I = 0$$

die Behauptung.

(ii) Sei $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $0 < \varepsilon \leq 1$ so klein, dass $B_\varepsilon(x_0) \subset [a,b]$ (also $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$) und $|f(y) - f(x_0)| < \delta$ für alle $y \in [a,b]$ mit $|x_0 - y| < \varepsilon$ gilt. Zunächst berechnen wir unter Verwendung von $\operatorname{supp} \eta \subset (-1, 1)$

$$\int_a^b \eta_\varepsilon(x_0 - t)\, dt = -\int_b^a \varepsilon^{-1} \eta \left(\frac{x_0 - t}{\varepsilon} \right) dt = \varepsilon^{-1} \int_{\frac{x_0 - b}{\varepsilon}}^{\frac{x_0 - a}{\varepsilon}} \eta(z)\, \varepsilon\, dz = \int_{-1}^1 \eta(z)\, dz = 1,$$

da $\frac{x_0 - b}{\varepsilon} < -1 < 1 < \frac{x_0 - a}{\varepsilon}$. Daraus folgt

$$\int_a^b \eta_\varepsilon(x_0 - t) f(x_0)\, dt = f(x_0).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x_0) - f(x_0)| &= \left| \int_a^b \eta_\varepsilon(x_0 - t)(f(t) - f(x_0))\, dt \right| \\
&\leq \underbrace{\sup_{y \in B_\varepsilon(x_0)} |f(y) - f(x_0)|}_{\leq \delta} \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x_0)} \eta_\varepsilon(x_0 - t)\, dt}_{\leq 1} \leq \delta.
\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

(iii) Sei $K = \overline{\Omega}$. Da $f|_K$ gleichmäßig stetig ist, ist die Wahl von ε in Teilaufgabe (ii) unabhängig von $x_0 \in K$ (es hängt nur von K ab). Wir erhalten daher gleichmäßige Konvergenz, d. h. wir erhalten $\|f_\varepsilon - f\|_{C^0(\Omega)} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

(iv) Wie in Aufgabenteil (ii) haben wir

$$\eta_\varepsilon(x-a) = \eta_\varepsilon(x-b) = 0.$$

Durch partielle Integration und der Lösung zu Aufgabenteil (i) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon'(x) &= \int_a^b \eta_\varepsilon'(x-t) f(t)\, dt \\
&= -[\eta_\varepsilon(x-t) f(t)]_a^b + \int_a^b \eta_\varepsilon(x-t) f'(t)\, dt \\
&= (f')_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

(v) Sei $K = \overline{\Omega}$. Der Fall $k = 0$ wurde in Aufgabenteil (iii) bewiesen. Sei nun $k > 0$ und nehme an, dass die Aussage für $k-1$ schon bewiesen wurde.

Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(K, \{a, b\})$. Dies ist möglich, da K kompakt ist und somit der Abstand von K zu a bzw. b größer als 0 ist.

Die iterative Anwendung von dem Argument in Aufgabenteil (iv) gibt uns

$$f_\varepsilon^{(k)}(x) = (f^{(k)})_\varepsilon(x)$$

für alle $x \in K$.

Jetzt erhalten wir wie in Aufgabenteil (iii)

$$f_\varepsilon^{(k)}|_K = (f^{(k)})_\varepsilon|_K \rightrightarrows f|_K^{(k)}$$

mit $\varepsilon \to 0$. Alle Ableitungen (bis zur k-ten Ordunung) konvergieren gleichmäßig, es liegt also Konvergenz in $C^k(K)$ vor.

(vi) Bemerke zunächst, dass f beschränkt ist: Seien $L, M > 0$ mit $|f(x)| < M$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > L$. Dann gilt

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \max\left\{M, \|f\|_{L^\infty([-L,L])}\right\}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir

$$f_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt,$$

da $\eta_\varepsilon(x-t) = 0$ für alle $t \notin [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Daraus folgt

$$f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \eta\left(\frac{x-t}{\varepsilon}\right) f(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \eta(z) f(x-\varepsilon z)\, dz.$$

Sei $\delta > 0$ und sei $r > 0$ mit $|f(x)| < \frac{\delta}{4}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > r$. Sei weiterhin $\varepsilon > 2r$ mit $\varepsilon > 4\delta^{-1} r \|\eta\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq r + \varepsilon$:

$$|f_\varepsilon(x)| = \left|\int_{-1}^{1} \eta(z) f(x-\varepsilon z)\, dz\right| \leq \left|\frac{\delta}{4} \int_{-1}^{1} \eta(z)\, dz\right| = \frac{\delta}{4} < \delta,$$

da $|x - \varepsilon z| > r$ für alle $z \in [-1, 1]$.

Für alle übrigen $x \in \mathbb{R}$ können wir in verschiedene Fälle unterscheid.

$x \in [-r-\varepsilon, r-\varepsilon]$ (also $x+\varepsilon \leq r$, $x-\varepsilon \leq r-2\varepsilon < -r$):

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x-\varepsilon}^{-r} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| + \left| \int_{-r}^{r} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \frac{\delta}{4} + 2r\varepsilon^{-1} \|\eta\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} < \delta. \end{aligned}$$

$x \in [r-\varepsilon, -r+\varepsilon]$ (also $x+\varepsilon \geq r$, $x-\varepsilon \leq -r$):

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x-\varepsilon}^{-r} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| + \left| \int_{-r}^{r} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| + \left| \int_{r}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \frac{\delta}{4} + 2r\varepsilon^{-1} \|\eta\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} + \frac{\delta}{4} < \delta. \end{aligned}$$

$x \in [-r+\varepsilon, r+\varepsilon]$ (also $x+\varepsilon \geq -r+2\varepsilon > r$, $x-\varepsilon \geq -r$):

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq \left| \int_{-r}^{r} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| + \left| \int_{r}^{x+\varepsilon} \eta_\varepsilon(x-t) f(t)\, dt \right| \\ &\leq 2r\varepsilon^{-1} \|\eta\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} + \frac{\delta}{4} < \delta. \end{aligned}$$

Abgabe: Bis **Freitag, 12. Juni 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.