O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 9

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ
4	4	4	4	16

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Bemerkung 6.3 vorausgesetzt. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 9.1 (Gammafunktion) **[4 Punkte]**
Die *Gammafunktion* $\Gamma\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

definiert.
Zeigen Sie:

(i) Γ ist wohldefiniert, d. h. das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ konvergiert für alle $x > 0$.

(ii) Es gilt $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Γ ist unendlich oft differenzierbar mit

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\log t)^n e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x > 0$.

Lösung:

(i) Sei $x > 0$. Wir zeigen mithilfe von Majoranten, dass die beiden Integrale

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{und} \quad \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

existieren, was schon die Konvergenz des Ausgangsintegrals zeigt.

Zum ersten Integral ist

$$\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \left[\frac{1}{x} t^x\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x}$$

eine Majorante.

Für das zweite Integral zeigen wir zunächst per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_1^\infty e^{-t} t^n\, dt$$

konvergiert. Induktionsanfang:

$$\int_1^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{a\to\infty} [-e^{-t}]_1^a = e^{-1}.$$

Induktionsschritt (mit partiellem Integrieren):

$$\int_1^\infty e^{-t}t^n\,dt = \lim_{a\to\infty}[-e^{-t}t^n]_1^a + n\int_1^\infty e^{-t}t^{n-1}\,dt = e^{-1} + n\int_1^\infty e^{-t}t^{n-1}\,dt < \infty.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x-1$. Dann ist

$$\int_1^\infty e^{-t}t^n\,dt$$

eine konvergente Majorante vom zweiten Integral.

(ii) Sei $x > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt \\ &= -\lim_{a\to\infty}\left[e^{-t}t^x\right]_0^a + x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \\ &= -\lim_{a\to\infty} e^{-a}a^x + x\Gamma(x) = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

Für $n = 1$ erhalten wir (siehe oben)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = e^0 = 1.$$

Die gewünschte Aussage folgt aus der induktiven Definition der Fakultätsfunktion, da für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

(iii) Wir zeigen die Aussage per Induktion. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen. Dann gilt für alle $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\log t)^n e^{-t}t^{x-1} &= \frac{d}{dx}(\log t)^n e^{-t}e^{\log(t)\cdot(x-1)} \\ &= (\log t)^{n+1}e^{-t}e^{\log(t)\cdot(x-1)} \\ &= (\log t)^{n+1}e^{-t}t^{x-1}.\end{aligned}$$

Sei $x \in (0,\infty)$ und sei $[a,b] \subset (0,\infty)$ mit $b > 1$ ein Intervall, das eine offene Umgebung Ω von x enthält, sodass

$$G(x) = \int_0^\infty (\log t)^{n+1}e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

in b sein Maximum im Intervall $[a,b]$ annimmt. Bemerke, dass $\int_0^1 e^{-t}t^{x-n-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{x+n}\,dt$ eine Majorante für $G(x)$ ist (weil $\max\{t,t^{-1}\} \geq |\log t|$ für alle $t > 0$), weshalb $G(x)$ wohldefiniert ist. Weiterhin haben wir für

$$G_m(x) = \int_0^n (\log t)^{n+1}e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

mit $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\|G_m - G\|_{L^\infty([a,b])} = \left\|\int_m^\infty (\log t)^{n+1}e^{-t}t^{x-1}\,dt\right\|_{L^\infty([a,b])} = \int_m^\infty (\log t)^{n+1}e^{-t}t^{b-1}\,dt.$$

Letzteres ist gleich $|G(b) - G_m(b)|$ und konvergiert mit $m \to \infty$ gegen 0. Daher ist $(G_m(x))_m$ auf dem Intervall $[a,b]$ gleichmäßig konvergent.

Die Behauptung folgt nun direkt aus Proposition 5.77.

Aufgabe 9.2 (Definition der Ableitung) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Seien E, F Banachräume, sei $\Omega \subset E$ offen und sei $f\colon \Omega \to F$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.

Zeigen Sie, dass es *genau* eine Abbildung $A \in L(E,F)$ gibt, die

$$f(x) = f(x_0) + A\left\langle x - x_0 \right\rangle + o(\|x - x_0\|)$$

für alle $x \in \Omega$ erfüllt.

(Dies zeigt, dass die Ableitung wohldefiniert ist.)

(b) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y(x+z)^2 + 7 \\ z + \frac{1}{3}(x+y)^3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass g in $\mathbb{R}^3$ differenzierbar ist, und finden Sie die Ableitung Df von f.

Lösung:

(a) Seien $A, B \in L(E,F)$, $a, b \in o(\|x - x_0\|)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + A\left\langle x - x_0 \right\rangle + a(x)$$

und

$$f(x) = f(x_0) + B\left\langle x - x_0 \right\rangle + b(x)$$

für alle $x \in \Omega$. Dann gilt

$$(A - B)\left\langle x - x_0 \right\rangle = (b - a)(x)$$

für alle $x \in \Omega$. Wir erhalten

$$\lim_{x \to x_0} (A - B)\left\langle \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right\rangle = \lim_{x \to x_0} \frac{(b-a)(x)}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Sei nun $v \in E \setminus \{0\}$. Dann gilt für $x_h = hv + x_0$ (mit $h \in \mathbb{R}$):

$$0 = \|v\| \lim_{h \downarrow 0} (A - B)\left\langle \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} \right\rangle = \|v\| \lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{h}(A - B)\left\langle \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = (A - B)\left\langle v \right\rangle.$$

Daraus folgt $A = B$.

(b) Seien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&f\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (y+b)(x+z+a+c)^2 + 7 \\ z + c + \frac{1}{3}(x+y+a+b)^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y(x+z)^2 + 7 + b(x+z)^2 + 2y(x+z)(a+c) + (y+b)(a+c)^2 + 2b(x+z)(a+c) \\ z + c + \frac{1}{3}(x+y)^3 + (x+y)^2(a+b) + (x+y)(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a+b)^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y(x+z)^2 + 7 + b(x+z)^2 + 2y(x+z)(a+c) + o(\|(a,b,c)^t\|) \\ z + \frac{1}{3}(x+y)^3 + c + (x+y)^2(a+b) + o(\|(a,b,c)^t\|) \end{pmatrix} \\
&= f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y(x+z) & (x+z)^2 & 2y(x+z) \\ (x+y)^2 & (x+y)^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + o\Big(\Big\|(a,b,c)^t\Big\|\Big).
\end{aligned}$$

Dies erhalten wir, da für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ mit $\alpha + \beta + \gamma \geq 2$ gilt

$$\lim_{(a,b,c)^t \to 0} \frac{\left|a^\alpha b^\beta c^\gamma\right|}{\|(a,b,c)^t\|} = 0,$$

also $a^\alpha b^\beta c^\gamma \in o\big(\|(a,b,c)^t\|\big)$. (Siehe Plenumsübung.)

Also ist f in (x,y,z) differenzierbar und obige Matrix ist die darstellende Matrix der Ableitung $f'(x,y,z) \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ in diesem Punkt bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 9.3 (Ableitungen komplexer Funktionen) **[3 + 1 Punkte]**

(i) Seien $u, v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

gegeben ist.

Zeigen Sie, dass u und v partiell differenzierbar sind und die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

erfüllen. Folgern Sie, dass für alle $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f in $x_0 + iy_0$ durch

$$f'(x_0 + iy_0)\,\langle u\rangle = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right) \cdot u$$

für alle $u \in \mathbb{C}$ gegeben ist.

(Hinweis: Betrachten Sie die beiden Differenzenquotienten $\frac{f(z+t)-f(z)}{|t|}$ *und* $\frac{f(z+it)-f(z)}{|it|}$ *für* $z \in \mathbb{C}$ *und* $t \in \mathbb{R}$.*)*

(ii) Zeigen Sie, dass $k \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ nicht differenzierbar ist.

Lösung:

(i) Wir betrachten $\mathbb{C}$ als Banachraum über $\mathbb{C}$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ haben wir

$$f(z+t) = f(z) + f'(z)\,\langle t\rangle + o(|t|)$$

sowie

$$f(z+it) = f(z) + f'(z)\,\langle it\rangle + o(|it|).$$

Sei $z \in \mathbb{C}$ und seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $z = x_0 + iy_0$. Aufgrund der Definition der Ableitung $f'(z)$ (siehe oben) erhalten wir die folgenden Gleichungen (mit $t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
f'(z)\,\langle 1\rangle &= \lim_{t\downarrow 0} f'(z)\left\langle \frac{t}{t}\right\rangle \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{f'(z)\,\langle t\rangle}{|t|} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{f((x_0+t)+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{|t|} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{u(x_0+t,y_0) - u(x_0,y_0)}{t} + i \cdot \frac{v(x_0+t,y_0) - v(x_0,y_0)}{t}\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)\langle 1\rangle &= \lim_{t\uparrow 0} f'(z)\left\langle \frac{t}{t}\right\rangle \\
&= -\lim_{t\uparrow 0} \frac{f'(z)\langle t\rangle}{|t|} \\
&= -\lim_{t\uparrow 0} \frac{f((x_0+t)+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{|t|} \\
&= \lim_{t\uparrow 0}\left(\frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t}+i\cdot\frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{t}\right),
\end{aligned}
$$

also

$$
f'(z)\langle 1\rangle = \lim_{t\to 0}\left(\frac{u(x_0+t,y_0)-u(x_0,y_0)}{t}+i\cdot\frac{v(x_0+t,y_0)-v(x_0,y_0)}{t}\right);
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
f'(z)\langle i\rangle &= \lim_{t\downarrow 0} f'(z)\left\langle \frac{it}{t}\right\rangle \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{f'(z)\langle it\rangle}{|it|} \\
&= \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x_0+i(y_0+t))-f(x_0+iy_0)}{|it|} \\
&= \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t}+i\cdot\frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(z)\langle i\rangle &= \lim_{t\uparrow 0} f'(z)\left\langle \frac{it}{t}\right\rangle \\
&= -\lim_{t\uparrow 0} \frac{f'(z)\langle it\rangle}{|it|} \\
&= -\lim_{t\uparrow 0} \frac{f(x_0+i(y_0+t))-f(x_0+iy_0)}{|it|} \\
&= \lim_{t\uparrow 0}\left(\frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t}+i\cdot\frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t}\right),
\end{aligned}
$$

also

$$
f'(z)\langle 1\rangle = -if'(z)\langle i\rangle = \lim_{t\to 0}\left(-i\cdot\frac{u(x_0,y_0+t)-u(x_0,y_0)}{t}+\frac{v(x_0,y_0+t)-v(x_0,y_0)}{t}\right).
$$

Nehmen wir nun jeweils die Real- und Imaginärteile, erhalten wir

$$
\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \mathrm{Re}(f'(z)\langle 1\rangle) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)
$$

und

$$
\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \mathrm{Im}(f'(z)\langle 1\rangle) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0).
$$

Damit erhalten wir für $u\in\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
f'(z)\langle u\rangle &= uf'(z)\langle 1\rangle \\
&= u(\mathrm{Re}(f'(z)\langle 1\rangle)+i\mathrm{Im}(f'(z)\langle 1\rangle)) \\
&= u\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\right).
\end{aligned}
$$

(ii) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ haben wir

$$k(x+iy) = x - iy.$$

Falls k differenzierbar wäre, so würde mit Aufgabenteil (i) mit $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

folgen, ein Widerspruch.

Aufgabe 9.4 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) **[4 Punkte]**
Seien E und F Banachräume.

(i) Sei $\Omega \subset E$ offen und sei $f\colon \Omega \to F$ in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar.
Zeigen Sie, dass f in x_0 stetig ist.

(ii) Sei Ω wie in Definition 5.71 (i) und sei $f\colon \Omega \to E$ differenzierbar in $x_0 \in \Omega$.
Zeigen Sie, dass f in x_0 partiell differenzierbar ist.

(iii) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g partiell differenzierbar, aber nicht stetig ist.
(Insbesondere ist g partiell differenzierbar, aber nicht differenzierbar.)

Lösung:

(i)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)\langle x - x_0\rangle + o(\|x-x_0\|)\right) \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)\langle x - x_0\rangle\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\|x-x_0\| \frac{o(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|}\right) \\ &= f(x_0), \end{aligned}$$

da $f'(x_0) \in L(E,F)$ eine stetige lineare Abbildung ist.

(ii) Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann folgt aus der Differenzierbarkeit von f in x_0 für $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lim_{h\downarrow 0} \frac{f\left(\hat{x}_0^k, x_0^k + h\right) - f\left(\hat{x}_0^k, x_0^k\right)}{h} &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x_0 + he_k) - f(x_0)}{|he_k|} \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{f'(x_0)\langle he_k\rangle}{h} \\ &= \lim_{h\downarrow 0} f'(x_0)\langle e_k\rangle = f'(x_0)\langle e_k\rangle \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \lim_{h\downarrow 0} \frac{f\left(\hat{x}_0^k, x_0^k - h\right) - f\left(\hat{x}_0^k, x_0^k\right)}{-h} &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x_0 - he_k) - f(x_0)}{-\|-he_k\|} \\ &= \lim_{h\downarrow 0} \frac{f'(x_0)\langle -he_k\rangle}{-h} = f'(x_0)\langle e_k\rangle. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet e_k den k-ten Einheitsvektor der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^n$.

Daraus folgt schon

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\hat{x}_0^k, x_0^k + h\right) - f\left(\hat{x}_0^k, x_0^k\right)}{h} = f'(x_0)\left\langle e_k \right\rangle .$$

(iii) Für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2y(x^2+y^2) - 4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 2 \cdot \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x^2+y^2) - 4xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 2 \cdot \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Also ist g überall partiell differenzierbar. Es ist nicht stetig, da zum Beispiel

$$g(0,0) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{2t^2} = \lim_{t\to 0} g(t,t).$$

Abgabe: Bis **Freitag, 19. Juni 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.