Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz

Übungen zur Vorlesung Analysis II

Zusatzübungsblatt zur Vorlesung Analysis I/II
Kompaktheit

Aufgabe 1 (Kompakte Mengen)
Seien K_1, K_2 disjunkte kompakte Mengen in einem metrischen Raum E, so können K_1 und K_2 durch offene Mengen getrennt werden, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $\Omega_i \subset E$, $i = 1, 2$, sodass

$$K_i \subset \Omega_i \text{ für } i = 1, 2$$

gilt. Zeigen Sie dies.

Lösung: Wir betrachten die Menge $D = \{d(x, y) \colon (x, y) \in K_1 \times K_2\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $\delta = \inf D \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir zeigen zunächst $\delta > 0$.
Angenommen $\delta = 0$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ Elemente $x \in K_1$ und $y \in K_2$ mit $d(x, y) < \varepsilon$. Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ wählen wir $(x_n, y_n) \in K_1 \times K_2$ mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Nach Theorem 3.54 sind K_1 und K_2 folgenkompakt. Es existiert also eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ mit einem Grenzwert $a \in K_1$. Weiterhin existiert eine konvergente Teilfolge $\left(y_{n_{k_\ell}}\right)_\ell$ von $(y_{n_k})_k$ mit einem Grenzwert $b \in K_2$. Da für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$d\left(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}\right) < \frac{1}{n_{k_\ell}},$$

haben $\left(x_{n_{k_\ell}}\right)_\ell$ und $\left(y_{n_{k_\ell}}\right)_\ell$ denselben Grenzwert, d.h. $a = b$. Dies widerspricht der Disjunktheit von K_1 und K_2. Wir erhalten also $\delta > 0$.
Sei $\alpha = \frac{\delta}{3}$. Wir setzen

$$\Omega_1 = \bigcup_{x \in K_1} B_\alpha(x) \text{ und } \Omega_2 = \bigcup_{y \in K_2} B_\alpha(y).$$

Offensichtlich sind Ω_1 und Ω_2 offen und enthalten K_1 bzw. K_2. Seien $x \in \Omega_1$ und $y \in \Omega_2$ beliebig. Dann gibt es $x' \in K_1$ und $y' \in K_2$ mit $d(x', x) < \alpha$ und $d(y', y) < \alpha$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$d(x', y') \leq d(x', x) + d(x, y) + d(y', y) < 2\alpha + d(x, y).$$

Da $d(x', y') \geq \inf D = \delta = 3\alpha$, folgt daraus

$$d(x, y) > \alpha.$$

Insbesondere erhalten wir $x \neq y$. Dies zeigt, dass Ω_1 und Ω_2 disjunkt sind.

Aufgabe 2 (Variation des Banachschen Fixpunktsatzes)
Sei E ein kompakter metrischer Raum. Sei $T\colon E \to E$ eine Abbildung und gelte

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

für alle $x \neq y \in E$.
Zeigen Sie, dass dann T einen eindeutig bestimmten Fixpunkt besitzt.

Lösung: Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $f\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto d(T(x), x)$ stetigt ist. Seien $x \in E$ und $\varepsilon > 0$. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und sei $y \in E$ mit $d(x, y) < \delta$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= d(T(x), x) - d(T(y), y) \\ &\leq d(T(x), T(y)) + d(T(y), y) + d(y, x) - d(T(y), y) \\ &< 2d(x, y) \\ &< 2\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= d(T(y), y) - d(T(x), x) \\ &\leq d(T(y), T(x)) + d(T(x), x) + d(x, y) - d(T(x), x) \\ &< 2d(x, y) \\ &< 2\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dies zeigt, dass f in x stetig ist. Da x beliebig war, ist f somit stetig. Nach Theorem 3.63 gibt es $x_0 \in E$ mit $f(x_0) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$. Falls $f(x_0) > 0$, dann

$$f(T(x_0)) = d(T(T(x_0)), T(x_0)) < d(T(x_0), x_0) = f(x_0).$$

Dies widerspricht der Wahl von $f(x_0)$ als Infimum vom Bild von f. Wir erhalten also $f(x_0) = 0$, also $d(T(x_0), x_0) = 0$. Daraus folgt schon $T(x_0) = x_0$, d.h. x_0 ist ein Fixpunkt von T.
Nun müssen wir noch zeigen, dass x_0 der eindeutige Fixpunkt von T ist. Angenommen $y_0 \in E$ ist ein von x_0 verschiedener Fixpunkt von T. Dann gilt

$$d(x_0, y_0) = d(T(x_0), T(y_0)) < d(x_0, y_0),$$

ein direkter Widerspruch.

Aufgabe 3 (Endlich-dimensionale normierte Räume)
Zeigen Sie, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ paarweise äquivalent sind.
Anleitung: Seien $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ eine feste Norm, z.B. die euklidische Norm. Ziegen Sie, dass $\|\cdot\|$ auf dem Raum $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ stetig ist, und betrachen Sie das Supremum und das Infimum von $\|\cdot\|$ auf der Einheitskugel $\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$. Folgern Sie, dass $\|\cdot\|$ und $|\cdot|$ äquivalent sind.

Lösung: Wir folgen der Anleitung. Sei $|\cdot|$ also die euklidische Norm und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.
Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei e_i das Element von $\mathbb{R}^n$, dessen i-ter Eintrag 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind. (D.h. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ bildet die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.) Wir setzen

$$a = (\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|) \in \mathbb{R}^n.$$

Sei nun $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir setzen $x' = (|x^1|, \ldots, |x^n|) \in \mathbb{R}^n$ und bezeichnen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung und der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x^i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x^i| \, \|e_i\| \\ &= \langle x', a \rangle \\ &\leq |x'||a| \\ &= |x||a|. \end{aligned}$$

Wir setzen $k = |a|$. Dann gilt also für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| \leq k|x|. \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\| \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig bezüglich der Norm $|\cdot|$ ist. Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$. Sei weiterhin $y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - y| < \delta$. Dann folgt mit (1)

$$\|x - y\| \leq k|x - y| < k\delta = \varepsilon,$$

was zu zeigen war.
Sei nun $S = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$. Nach dem Satz von Heine–Borel ist S kompakt (bezüglich der Norm $|\cdot|$), da es beschränkt und abgeschlossen ist. Nach Theorem 3.63 gibt es also $x_0 \in S$ mit $\|x_0\| = \inf\limits_{x \in S} \|x\|$. Da $0 \notin S$, gilt $\|x_0\| > 0$. Setze $\ell = \|x_0\|$. Seien nun $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig und $x' = \frac{1}{|x|} x \in S$. Dann gilt

$$\ell \leq \|x'\| = \frac{1}{|x|} \|x\|,$$

also

$$\ell|x| \leq \|x\|.$$

Sei nun $c = \max\left\{k, \frac{1}{\ell}\right\}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{c} \cdot |x| \leq \|x\| \leq c \cdot |x|.$$

Dies zeigt, dass die beiden Normen $|\cdot|$ und $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.
Wir haben also gezeigt, dass jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ zur euklidischen Norm äquivalent ist. Da die Äquivalenz zweier Normen eine Äquivalenzrelation ist, sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ zueinander äquvalent.

Aufgabe 4 (Hausdorff-Metrik)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller nichtleeren, kompakten Teilmengen von K und definiere für $X \in \mathcal{K}$ und $\varepsilon > 0$

$$X_\varepsilon := \bigcup_{x \in X} (B_\varepsilon(x) \cap K).$$

Definiere $d_\mathcal{H} \colon \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d_\mathcal{H}(X, Y) := \inf\{\varepsilon > 0 \colon X \subset Y_\varepsilon \text{ und } Y \subset X_\varepsilon\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $d_\mathcal{H}$ eine Metrik auf $\mathcal{K}$ definiert.

(ii) Zeigen Sie, dass $d_\mathcal{H}$ äquivalent zur Metrik

$$\delta(X, Y) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y| + \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} |y - x|$$

ist. Warum betrachtet man nicht $\Delta(X, Y) := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y|$?

(iii) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{K}, d_\mathcal{H})$ vollständig ist.

(iv) Betrachten Sie die Iterationen der Koch-Kurve, z.B. auf `wikipedia`. Bestimmen Sie die Länge der Kurve nach der n-ten Iteration, wenn die Länge anfangs gleich eins ist.

(v) Zeigen Sie, dass diese Iterationen bezüglich $d_\mathcal{H}$ konvergieren.

(vi) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{K}, d_\mathcal{H})$ kompakt ist.

Lösung:

(i) Wohldefiniertheit und Symmetrie: Folgen direkt aus der Definition.

Definitheit: Seien $X, Y \in \mathcal{K}$ mit $X \neq Y$. Da für alle $\varepsilon > 0$ gilt $X \subset X_\varepsilon$, erhalten wir $\{\varepsilon > 0 \colon X \subset X\varepsilon\} = \mathbb{R}_{>0}$. Daraus folgt $d_\mathcal{H}(X, X) = 0$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $Y \setminus X \neq \emptyset$. Sei also $y \in Y \setminus X$. Sei weiterhin

$$\delta = \inf_{x \in X} |y - x|.$$

Dieses Infimum existiert nach Theorem 3.63, da X kompakt und die Funktion $x \mapsto |y - x|$ stetig (bezüglich der euklidischen Norm) auf X ist. Angenommen $\delta = 0$. Dann ist y ein Häufungspunkt von X in $\mathbb{R}^n$. Daher konvergiert eine Folge in X gegen y. Da X kompakt und damit abgeschlossen ist, liegt y somit in X, ein Widerspruch. Damit muss $\delta > 0$ sein. Wir zeigen nun, dass $Y \not\subset X_\delta$, woraus $d_\mathcal{H}(X, Y) \geq \delta$ folgt. Angenommen $Y \subset X_\delta$. Dann ist insbesondere $y \in B_\delta(x) \cap K$ für ein $x \in X$. Daraus folgt $|y - x| < \delta$. Dies widerspricht der Wahl von δ.

Dreiecksungleichung: Seien $X, Y, Z \in \mathcal{K}$. Seien weiterhin $\varepsilon, \delta > 0$ mit

$$X \subset Z_\varepsilon \text{ und } Z \subset X_\varepsilon$$

sowie

$$Z \subset Y_\delta \text{ und } Y \subset Z_\delta.$$

Wir zeigen, dass

$$X \subset Y_{\varepsilon+\delta} \text{ und } Y \subset X_{\varepsilon+\delta}.$$

Hieraus folgt schon

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) \leq d_{\mathcal{H}}(X, Z) + d_{\mathcal{H}}(Z, Y).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} X &\subset Z_\varepsilon \\ &= \bigcup_{z \in Z} (B_\varepsilon(z) \cap K) \\ &\subset \bigcup_{z \in Y_\delta} (B_\varepsilon(z) \cap K) \\ &\subset \bigcup_{z \in Y} (B_{\varepsilon+\delta}(z) \cap K) \\ &= Y_{\varepsilon+\delta}. \end{aligned}$$

Mit ähnlichen Folgerungen können wir auch $Y \subset X_{\varepsilon+\delta}$ zeigen.

(ii) Seien $X, Y \in \mathcal{K}$ beliebig mit $X \neq Y$. Wir zeigen zunächst $d_{\mathcal{H}}(X, Y) \leq 2\delta(X, Y)$. Seien hierzu

$$a = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} |x - y| \text{ und } b = \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} |y - x|.$$

Wir müssen zeigen, dass für $\varepsilon = 2(a + b)$ gilt

$$X \subset Y_\varepsilon \text{ und } Y \subset X_\varepsilon.$$

Wir demonstrieren nur $X \subset Y_\varepsilon$, da die andere Inklusion analog gezeigt werden kann. Sei $x_0 \in X$. Es genügt ein $y_0 \in Y$ mit $|x_0 - y_0| < \varepsilon$ zu finden. Nach Wahl von a gilt

$$\inf_{y \in Y} |x_0 - y| \leq a.$$

Falls $\inf_{y \in Y} |x_0 - y| = a$, so gibt es wegen der Kompaktheit von Y ein $y_0 \in Y$ mit $|x_0 - y_0| = a < 2(a + b) = \varepsilon$ (da $a + b \neq 0$). Andernfalls gibt es ein $y_0 \in Y$ mit $|x_0 - y_0| < a < \varepsilon$.

Wir zeigen nun $\frac{1}{3} \cdot \delta(X, Y) \leq d_{\mathcal{H}}(X, Y)$. Seien $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ beliebig. Wir setzen

$$a = \inf_{y \in Y} |x_0 - y|, b = \inf_{x \in X} |y_0 - x|$$

und $\varepsilon = \frac{1}{3}(a + b)$. Wir müssen zeigen, dass $\varepsilon \leq d_{\mathcal{H}}(X, Y)$. Hierfür genügt es zu zeigen, dass $X \not\subset Y_\varepsilon$ oder $Y \not\subset X_\varepsilon$. Angenommen $X \subset Y_\varepsilon$. Dann gibt es $y \in Y$ mit $|x_0 - y| < \varepsilon = \frac{1}{3}(a + b)$. Insbesondere erhalten wir $a < \frac{1}{3}(a + b)$, also $2a < b$. Hieraus folgt $\varepsilon < \frac{b}{2} \leq b$. Da also $\varepsilon < b$, erhalten wir $y_0 \notin X_\varepsilon$.

Insgesamt haben wir damit gezeigt

$$\frac{1}{3} \cdot \delta(X, Y) \leq d_{\mathcal{H}}(X, Y) \leq 3\delta(X, Y).$$

Also sind die beiden Metriken äquivalent.

Wir betrachten nicht $\Delta(X, Y)$, da dies nicht notwendigerweise eine Metrik ist: Falls $X \subsetneq Y$, so ist für alle $x \in X$

$$\inf_{y \in Y} |x - y| = 0,$$

also $\Delta(X, Y) = 0$. Dies zeigt, dass Δ nicht notwendigerweise positiv definit ist.

(iii) Da dieser Beweis sehr umfangreich ist, werden nur die Hauptschritte erläutert.

Schritt 1: Sei $(X_k)_k$ eine Cauchyfolge bezüglich $d_{\mathcal{H}}$. Definiere $X \subset \mathbb{R}^n$ als die Menge aller Grenzwerte konvergenter folgen $(x_k)_k$ mit $x_k \in X_k$ für alle k.

Schritt 2: Wir müssen zeigen $X \in \mathcal{K}$. Da K kompakt und somit abgeschlossen ist, folgt direkt $X \subset K$. Damit $X \in \mathcal{K}$ genügt es also zu zeigen, dass X abgeschlossen und nichtleer ist. Damit $X \neq \emptyset$, muss man zeigen, dass es eine konvergente Folge $(x_k)_k$ mit $x_k \in X_k$ für alle k gibt. Diese kann beispielsweise wie folgt konstruiert werden: Sei $(y_k)_k$ eine beliebige Folge mit $y_k \in X_k$ für alle k. Wegen der Kompaktheit von K besitzt diese eine konvergente Teilfolge $(y_{k_i})_i$. Setze $x_{k_i} = y_{k_i}$ für alle i. Dann ist $(x_{k_i})_i$ eine Cauchyfolge. Nun kann die Eigenschaft, dass $(X_k)_k$ eine Cauchyfolge ist, verwendet werden, um $(x_{k_i})_i$ zu einer Folge $(x_k)_k$ zu erweitern. Hierfür setzen wir $x_k = x_{k_{i_0}}$, falls ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $k = k_{i_0}$ existiert. Andernfalls wählen wir x_k hinreichend nah zu $x_{k_{i_0}}$, wobei $i_0 \in \mathbb{N}$ das kleinste Element mit der Eigenschaft $k < k_{i_0}$ ist. Um die Abgeschlossenheit von X zu zeigen, sei $(a_i)_i$ eine Folge in X, die in $\mathbb{R}^n$ gegen ein a konvergiert. Um zu zeigen, dass a in X liegt, verwenden wir die Definition von X: Jedes Folgeglied a_i ist selbst der Grenzwert von einer Folge in K, deren Folgeglieder in den Mengen $(X_k)_k$ liegen. Durch geeignete Wahl von Folgegliedern der Folgen mit den Grenzwerten a_i (Stichwort „Diagonalargument“) erhalten wir eine neue Folge in K, deren Folgeglieder in den Mengen $(X_k)_k$ liegen und die gegen a konvergiert. Jeder Häufungspunkt einer Folge in X liegt also in X, womit X abgeschlossen ist.

Schritt 3: Wir müssen zeigen, dass $(X_k)_k$ gegen X konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir müssen $n \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $k > N$ gilt $X \subset (X_k)_\varepsilon$ und $X_k \subset X_\varepsilon$. Die Inklusion $X \subset (X_k)_\varepsilon$ (für genügend große k) folgt daraus, dass $(X_k)_k$ eine Cauchyfolge ist: Für alle hinreichend großen k gilt $X_m \subset (X_k)_\varepsilon$ für alle $m > k$. Die Definition von X impliziert also $X \subset (X_k)_\varepsilon$ für genügend große k. Die Inklusion $X_k \subset X_\varepsilon$ (für hinreichend große k) kann in zwei Schritten gezeigt werden: Durch die Cauchyeigenschaft von $(X_k)_k$ kann eine Teilfolge $(X_{k_i})_i$ gewählt werden mit

$$d_{\mathcal{H}}(X_{k_i}, X_{k_{i+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Da $\sum_{i=2}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2}$, kann für $i \geq 2$ durch die Definition von X gezeigt werden, dass $X_{k_i} \subset X_\varepsilon$. Sei nun $N > k_2$ mit

$$d_{\mathcal{H}}(X_k, X_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k, m > N$. Dann folgt die Inklusion $X_k \subset X_\varepsilon$ für alle $k > N$.

(iv) Auszug aus dem entsprechende Wikipedia-Artikel:

„Man kann die Kurve anschaulich mittels eines iterativen Prozesses konstruieren [...]. Zu Beginn besteht die Kurve aus einem einzigen Streckenstück. Die Iteration besteht nun darin, dass dieser Streckenabschnitt durch einen anderen, aus vier gleich langen Strecken bestehenden Streckenabschnitt ersetzt wird, der wie folgt aufgebaut ist: Strecke – 60°-Winkel – Strecke – 120°-Winkel (in der Gegenrichtung) – Strecke – 60°-Winkel – Strecke. Jeder der vier neuen Streckenabschnitte hat 1/3 der Länge des ursprünglichen Streckenabschnitts. Im nächsten Schritt wird jeder der vier Streckenabschnitte durch einen Streckenabschnitt der oberen Art ersetzt.“

Ist die Länge zu Beginn eines Iterationsschrittes also ℓ, so ist sie danach $\frac{4}{3}\ell$. Damit hat die Kurve nach n Iterationsschritten bei einer Startlänge $\ell_0 = 1$ die Länge

$$\ell_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

(v) Es seien $K = [0,1]^2$, $K_0 = [0,1] \times \{0\} \subset [0,1]^2$ und es bezeichne $K_n \subset [0,1]^2$ die n-te Iteration der Koch-Kurve. Da $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass $(K_n)_n$ eine Cauchyfolge ist. Wegen der Äquivalenz von $d_{\mathcal{H}}$ und δ, genügt es zu zeigen, dass $(K_n)_n$ eine Cauchyfolge bezüglich δ ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Kochkurve K_n besteht aus 4^n gleichlangen Streckenstücken der Länge a mit $4^n \cdot a = \ell_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Ein geometrisches Argument zeigt:

$$\sup_{x \in K_n} \inf_{y \in K_{n+1}} |x - y| + \sup_{y \in K_{n+1}} \inf_{x \in K_n} |y - x| = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a.$$

(Betrachte hierfür z.B. grafisch die erste Iteration.) Da $a = 3^{-n}$, erhalten wir

$$\delta(K_n, K_{n+1}) = 3^{-n} b < 2^{-n} b$$

mit $b = \left(3^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)$.

Seien nun $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2b}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $m > n > N$:

$$\delta(K_n, K_m) \leq \delta(K_n, K_{n+1}) + \ldots + \delta(K_{m-1}, K_m) < b \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-n} b = \frac{2b}{2^n} \leq \frac{2b}{n} < \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, dass $(X_k)_k$ eine Cauchyfolge ist.

(vi) Nach Theorem 3.54 ist $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ genau dann kompakt, wenn es vollständig und präkompakt ist. Wir müssen also lediglich noch zeigen, dass es präkompakt ist. Wir zeigen dies bezüglich der zu $d_{\mathcal{H}}$ äquivalenten Metrik δ. Sei also $\varepsilon > 0$. Da K präkompakt ist, gibt es $N \in \mathbb{N}$ und x_i, $1 \leq i \leq N$, sodass

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} (B_{\varepsilon/3}(x_i) \cap K).$$

Sei

$$\mathcal{E} := \left\{ \overline{\bigcup_{i \in J} (B_{\varepsilon/3}(x_i) \cap K)} \colon \emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, N\} \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{E}$ ist endlich und eine Teilmenge von $\mathcal{K}$, da Abschlüsse von Teilmengen der kompakten Menge K wieder kompakte Teilmengen von K sind. Wir zeigen

$$\mathcal{K} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} B_\varepsilon(\mathcal{E}).$$

Sei $A \in \mathcal{K}$. Wir setzen $J = \{i \in \{1, \ldots, N\} \colon A \cap B_{\varepsilon/3}(x_i) \neq \emptyset\}$ und $E = \overline{\bigcup_{i \in J} (B_{\varepsilon/3}(x_i) \cap K)}$ und zeigen $A \in B_\varepsilon(E)$, also $\delta(A, E) < \varepsilon$. Wir haben $A \subset E$, weshalb $\Delta(A, E) = 0$ gilt. Es ist also

$$\delta(A, E) = \sup_{y \in E} \inf_{x \in A} |y - x|.$$

Wegen der Wahl von J und E gilt für jedes $y_0 \in E$

$$\inf_{x \in A} |y_0 - x| \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Insbesondere also $\delta(A, E) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$, was zu zeigen war.