O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 10

1	2	3	4	Σ

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor
Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Theorem 6.17 vorausgesetzt. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 10.1 (Ableitungen und Gradienten) **[2 + 2 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung sowie den Gradienten in allen Punkten, in denen die jeweilige Funktion differenzierbar ist.

(i) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$.

(ii) $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$.

Lösung:

Aufgabe 10.2 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen II) **[2 + 2 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Betrachte die Abbildung
$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit
$$\varphi(x_0) = \inf_{t\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \varphi(t)$$
gibt, d. h. die Funktion φ nimmt ihr globales Minimum in $\mathbb{S}^{n-1}$ an. Folgern Sie, dass $D\varphi(x_0) = 0$ gilt.

(ii) Berechnen Sie $D\varphi(x)\langle y\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass x_0 ein Eigenvektor der Matrix A ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?

Lösung:

Aufgabe 10.3 (Wer lebt wo?) **[4 Punkte]**
Für ihre Vorbereitung auf die Analysis-Klausur findet eine Studentin folgende Zeilen in ihren Mitschriften:

Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige bilineare Abbildung und seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt für $h(x) := A\langle f(x), g(x)\rangle$

$$\begin{aligned}
Dh(x_0)\langle y\rangle &= D(A\circ[f\times g]\circ\Delta)(x_0)\langle y\rangle\\
&= \Big(DA([f\times g](\Delta(x_0)))\circ D([f\times g]\circ\Delta)(x_0)\Big)\langle y\rangle\\
&= (DA(f(x_0),g(x_0))\circ D[f\times g](\Delta(x_0))\circ D\Delta(x_0))\langle y\rangle\\
&= (DA(f(x_0),g(x_0))\circ D[f\times g](\Delta(x_0)))\langle (y,y)\rangle\\
&= DA(f(x_0),g(x_0))\langle (Df(x_0)\langle y\rangle, Dg(x_0)\langle y\rangle)\rangle\\
&= A\langle f(x_0), Dg(x_0)\langle y\rangle\rangle + A\langle Df(x_0)\langle y\rangle, g(x_0)\rangle.
\end{aligned}$$

Helfen Sie der Studentin, diesen Beweis wieder zu verstehen, indem Sie

(a) die fehlenden Definitionen der auftretenden Funktionen Δ und $[f \times g]$ ergänzen.

(b) für die folgenden Ausdrücke angeben, zu welchen Räumen sie gehören. Benutzen Sie dabei soweit möglich die Schreibweisen $C^{\cdots}(\ldots)$ und $L_{\ldots}(\ldots)$ anstatt $\mathrm{Abb}(\ldots)$.

(i) $x_0 \in$
(ii) $y \in$
(iii) $A \in$
(iv) $[f \times g] \in$
(v) $\Delta \in$
(vi) $h \in$
(vii) $[f \times g] \circ \Delta \in$
(viii) $D([f \times g] \circ \Delta)(x_0) \in$
(ix) $DA(f(x_0), g(x_0)) \in$
(x) $D[f \times g](\Delta(x_0)) \in$
(xi) $D\Delta(x_0) \in$
(xii) $Dh(x_0) \in$
(xiii) $Df \in$
(xiv) $A \langle Df(x_0) \langle y \rangle, g(x_0) \rangle \in$

Lösung:

Aufgabe 10.4 (Interpolationsungleichung II) **[4 Punkte]**

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ schreiben wir $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f$ für $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$.

In einem alten Buch hat ein Student auf der Suche nach der Lösung zu einer Übungsaufgabe folgenden Beweis gefunden, in dem leider einige Zeilen nicht mehr zu lesen waren:

Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit kompaktem Träger.

$$u^2(x,y) = 2\int_{-\infty}^{x} u(t,y)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\,dt \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,y)|\,\|\nabla u(t,y)\|\;dt.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u^4 &\le 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,y)|\,\|\nabla u(t,y)\|\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,s)|\,\|\nabla u(x,s)\|\,ds\right)dx\,dy\\ &= 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|\,\|\nabla u\|\right)^2\\ &\le 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}u^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\|\nabla u\|^2\right).\end{aligned}$$

Formulieren Sie die Aussage, die hier bewiesen wurde, und begründen Sie die einzelnen Beweisschritte, die hier durchgeführt wurden.

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 26. Juni 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.