O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 10

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ
4	4	4	4	16

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Theorem 6.17 vorausgesetzt. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 10.1 (Ableitungen und Gradienten) **[2 + 2 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung sowie den Gradienten in allen Punkten, in denen die jeweilige Funktion differenzierbar ist.

(i) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|$.

(ii) $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$.

Lösung: Diese Lösung kommt ohne die Verwendung der Jacobi-Matrix aus und nutzt ausschließlich die Kettenregel und die direkte Berechnung von Ableitungen. Selbstverständlich können viele der Nachweise mit Verwendung der Jacobi-Matrix deutlich abgekürzt werden.

(i) Die Wurzelfunktion $r\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ \alpha \mapsto \sqrt{\alpha}$ ist für $\alpha > 0$ differenzierbar mit Ableitung $r'(\alpha)\langle\beta\rangle = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$ für alle $\beta \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x+\xi\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,\xi\rangle + \|\xi\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle \xi, x\rangle + o(\|\xi\|).$$

$s\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \|x\|^2$ ist also differenzierbar mit Ableitung $s'(x)\langle\xi\rangle = 2\langle\xi,x\rangle$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $f(x) = r(s(x))$ und wir erhalten mit Hilfe der Kettenregel die Differenzierbarkeit von f in $x \neq 0$. Die Ableitung lautet

$$f'(x)\langle\xi\rangle = r'(s(x))\langle s'(x)\langle\xi\rangle\rangle = 2r'\left(\|x\|^2\right)\langle\langle x,\xi\rangle\rangle = 2\frac{\langle x,\xi\rangle}{2\sqrt{\|x\|^2}} = \frac{\langle x,\xi\rangle}{\|x\|}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nach Definition des Gradienten gilt

$$\langle \xi, \nabla f(x)\rangle = \left\langle \xi, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|} = g(x)$.

An der Stelle 0 ist f nicht differenzierbar: Angenommen, f wäre in 0 differenzierbar. Dann wäre es insbesondere partiell differenzierbar. Wir erhalten

$$-1 = \lim_{t\uparrow 0}\frac{-t}{t} = \lim_{t\uparrow 0}\frac{\|te_1\|}{t} = D_1 f(0) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{\|te_1\|}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{t}{t} = 1,$$

ein Widerspruch.

(ii) Wir verketten folgende Funktionen:

$$\begin{aligned}
&\alpha\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (\|x\|, x),\\
&\beta\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n,\ (a,x) \mapsto \left(a^{-1}, x\right),\\
&\gamma\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (a,x) \mapsto ax.
\end{aligned}$$

Es gilt $g = \gamma \circ \beta \circ \alpha$. Wir berechnen die Ableitungen, wobei $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \varepsilon \in \mathbb{R}$ sind:

$$\begin{aligned}
\alpha(x+\xi) &= (\|x+\xi\|, x+\xi) = \left(\|x\| + \left\langle \xi, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + o(\|\xi\|), x+\xi\right)\\
&= \alpha(x) + \underbrace{\left(\left\langle \xi, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle, \xi\right)}_{\alpha'(x)\langle\xi\rangle} + o(\|\xi\|),\\
\beta(\lambda+\varepsilon,\, x+\xi) &= \left(\frac{1}{\lambda+\varepsilon}, x+\xi\right) = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{-\varepsilon}{\lambda^2} + o(|\varepsilon|), x+\xi\right)\\
&= \beta(\lambda,\, x) + \underbrace{\left(\frac{-\varepsilon}{\lambda^2}, \xi\right)}_{\beta'(\lambda,x)\langle(\varepsilon,\xi)\rangle} + o(\|(\varepsilon,\xi)\|),\\
\gamma(\lambda+\varepsilon,\, x+\xi) &= (\lambda+\varepsilon)(x+\xi) = \lambda x + \varepsilon x + \lambda\xi + \varepsilon\xi\\
&= \gamma(\lambda, x) + \underbrace{\varepsilon x + \lambda\xi}_{\gamma'(\lambda,x)\langle(\varepsilon,\xi)\rangle} + o(\|(\varepsilon,\xi)\|).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Kettenregel ist g also in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
g'(x)\langle\xi\rangle &= (\gamma'(\beta\circ\alpha(x)) \circ (\beta\circ\alpha)'(x))\langle\xi\rangle = (\gamma'(\beta\circ\alpha(x)) \circ \beta'(\alpha(x)) \circ \alpha'(x))\langle\xi\rangle\\
&= \left(\gamma'\left(\tfrac{1}{\|x\|}, x\right) \circ \beta'(\|x\|, x)\right)\left\langle\left(\left\langle \xi, \tfrac{x}{\|x\|}\right\rangle, \xi\right)\right\rangle\\
&= \gamma'\left(\tfrac{1}{\|x\|}, x\right)\left\langle\left(\frac{-\left\langle \xi, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle}{\|x\|^2}, \xi\right)\right\rangle\\
&= \frac{\xi}{\|x\|} - \frac{\left\langle \xi, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle}{\|x\|^2}x = \frac{\xi}{\|x\|} - \frac{\langle \xi, x\rangle x}{\|x\|^3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.2 (Eigenwerte symmetrischer Matrizen II) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Betrachte die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}.$$

(i) Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\varphi(x_0) = \inf_{t\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \varphi(t)$$

gibt, d. h. die Funktion φ nimmt ihr globales Minimum in $\mathbb{S}^{n-1}$ an. Folgern Sie, dass $D\varphi(x_0) = 0$ gilt.

(ii) Berechnen Sie $D\varphi(x)\langle y\rangle$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Folgern Sie, dass x_0 ein Eigenvektor der Matrix A ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?

Lösung:

(i) Wir bemerken zunächst, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\varphi(\lambda x) = \frac{\langle A(\lambda x), \lambda x\rangle}{\|\lambda x\|^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2}\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = \varphi(x).$$

Da φ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, nimmt $\varphi|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ auf der Kompakten Menge $\mathbb{S}^{n-1}$ sein Minimum an. Sei $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\varphi(x_0) = \inf_{t \in \mathbb{S}^{n-1}} \varphi(t).$$

Wir zeigen, dass $\varphi(x_0)$ schon das globale Minimum von φ ist. Sei hierzu $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt für $\lambda = \|y\|^{-1}$

$$\varphi(y) = \varphi(\lambda y) \geq \varphi(x_0),$$

da $\lambda y \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Da ein globales Minimum insbesondere ein lokales Minimum ist und die Funktion φ in einer offenen Umgebung von x_0 differenzierbar ist, erhalten wir mit Theorem 6.15, dass $D\varphi(x_0) = 0$ gilt.

(ii) Seien

$$\Delta\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ x \mapsto (x, x)$$

und

$$u\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle\,.$$

Die Ableitung von Δ ist durch

$$D\Delta(x)\,\langle y\rangle = (y, y)$$

gegeben, da $\Delta(x + y) = \Delta(x) + (y, y)$ gilt. Die Funktion u ist eine Bilinearform.

Wir wenden die Ketten-, Produkt- und Quotientenregel, die Lösung von Aufgabe 10.1 (i) sowie Beispiel 6.7 an:

$$\begin{aligned}
D\varphi(x)\langle y\rangle &= D\left(\frac{u \circ \Delta}{s}\right)(x)\langle y\rangle \\
&= \left(\frac{D(u \circ \Delta)(x)}{s(x)} - \frac{(u \circ \Delta)(x) Ds(x)}{s^2(x)}\right)\langle y\rangle \\
&= \left(\frac{Du(x, x) \circ D\Delta(x)}{\|x\|^2} - \frac{\langle Ax, x\rangle\, Ds(x)}{\|x\|^4}\right)\langle y\rangle \\
&= \frac{Du(x, x)\,\langle (y, y)\rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle Ax, x\rangle\, Ds(x)\langle y\rangle}{\|x\|^4} \\
&= \frac{2\,\langle Ax, y\rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle Ax, x\rangle\, 2\,\langle x, y\rangle}{\|x\|^4}
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\langle Ax_0, y\rangle}{\|x_0\|^2} - \frac{\langle Ax_0, x_0\rangle\,\langle x_0, y\rangle}{\|x_0\|^4} \\
&= \langle Ax_0, y\rangle - \langle Ax_0, x_0\rangle\,\langle x_0, y\rangle \\
&= \langle Ax_0, y\rangle - \langle \langle Ax_0, x_0\rangle\, x_0, y\rangle \\
&= \langle Ax_0 - \langle Ax_0, x_0\rangle\, x_0, y\rangle.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $Ax_0 - \langle Ax_0, x_0 \rangle x_0 = 0$, also $Ax_0 = \langle Ax_0, x_0 \rangle x_0$. Dies zeigt, dass x_0 ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $\langle Ax_0, x_0 \rangle$ ist.

Aufgabe 10.3 (Wer lebt wo?) **[4 Punkte]**

Für ihre Vorbereitung auf die Analysis-Klausur findet eine Studentin folgende Zeilen in ihren Mitschriften:

Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$, sei $A \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige bilineare Abbildung und seien $f, g \in C^1(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt für $h(x) := A\langle f(x), g(x) \rangle$,

$\boxed{\Delta \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,\ x \mapsto (x,x) \text{ und } [f \times g] \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (f(x), g(y))}$

$$\begin{aligned}
Dh(x_0)\langle y \rangle &= D(A \circ [f \times g] \circ \Delta)(x_0)\langle y \rangle \\
&= \Big(DA([f \times g](\Delta(x_0))) \circ D([f \times g] \circ \Delta)(x_0)\Big)\langle y \rangle \\
&= (DA(f(x_0), g(x_0)) \circ D[f \times g](\Delta(x_0)) \circ D\Delta(x_0))\langle y \rangle \\
&= (DA(f(x_0), g(x_0)) \circ D[f \times g](\Delta(x_0)))\langle (y,y) \rangle \\
&= DA(f(x_0), g(x_0))\langle (Df(x_0)\langle y \rangle, Dg(x_0)\langle y \rangle) \rangle \\
&= A\langle f(x_0), Dg(x_0)\langle y \rangle \rangle + A\langle Df(x_0)\langle y \rangle, g(x_0) \rangle .
\end{aligned}$$

Helfen Sie der Studentin, diesen Beweis wieder zu verstehen, indem Sie

(a) die fehlenden Definitionen der auftretenden Funktionen Δ und $[f \times g]$ ergänzen.

(b) für die folgenden Ausdrücke angeben, zu welchen Räumen sie gehören. Benutzen Sie dabei soweit möglich die Schreibweisen $C^{\cdots}(\dots)$ und $L_{\dots}(\dots)$ anstatt $\mathrm{Abb}(\dots)$.

(i) $x_0 \in \mathbb{R}^m$

(ii) $y \in \mathbb{R}^m$

(iii) $A \in L_2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$

(iv) $[f \times g] \in C^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(v) $\Delta \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$

(vi) $h \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

(vii) $[f \times g] \circ \Delta \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(viii) $D([f \times g] \circ \Delta)(x_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(ix) $DA(f(x_0), g(x_0)) \in L(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

(x) $D[f \times g](\Delta(x_0)) \in L(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(xi) $D\Delta(x_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$

(xii) $Dh(x_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

(xiii) $Df \in C^0(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}))$

(xiv) $A\langle Df(x_0)\langle y \rangle, g(x_0) \rangle \in \mathbb{R}^n$

Lösung: Ist direkt in der Aufgabe eingetragen.

Aufgabe 10.4 (Interpolationsungleichung II) **[4 Punkte]**
Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ schreiben wir $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f$ für $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$.

In einem alten Buch hat ein Student auf der Suche nach der Lösung zu einer Übungsaufgabe folgenden Beweis gefunden, in dem leider einige Zeilen nicht mehr zu lesen waren:

Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit kompaktem Träger.

$$u^2(x,y) = 2\int_{-\infty}^{x} u(t,y)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\,dt \le 2\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,y)|\,\|\nabla u(t,y)\|\,dt.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} u^4 &\le 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,y)|\,\|\nabla u(t,y)\|\,dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|u(x,s)|\,\|\nabla u(x,s)\|\,ds\right)dx\,dy\\ &= 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u|\,\|\nabla u\|\right)^2\\ &\le 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}u^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\|\nabla u\|^2\right).\end{aligned}$$

Formulieren Sie die Aussage, die hier bewiesen wurde, und begründen Sie die einzelnen Beweisschritte, die hier durchgeführt wurden.

Lösung: *Aussage:* Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^4 \le 4\left(\int_{\mathbb{R}^2}u^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^2}\|\nabla u\|^2\right).$$

Da u einen kompakten Träger hat, gibt es ein $M \in \mathbb{N}_{>1}$, sodass $\operatorname{supp} u \subset [-(M-1), M-1]^2$ gilt. Also insbesondere gilt $u(x,y) = 0$, falls $|x| \ge M$ oder $|y| \ge M$ (und selbiges gilt für beide partiellen Ableitungen).

- $$u^2(x,y) = 2\int_{-\infty}^{x} u(t,y)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\,dt$$
  – Es genügt
  $$u^2(x,y) = 2\int_{-M}^{x} u(t,y)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\,dt$$
  zu zeigen:
  $$2\int_{-M}^{x} u(t,y)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\,dt = \int_{-M}^{x}\frac{\partial}{\partial x}u^2(t,y)\,dt = u^2(x,y) - u^2(-M,y) = u^2(x,y).$$
- $$2\int_{-\infty}^{x} u(t,y)\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\,dt \le 2\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,y)|\,\|\nabla u(t,y)\|\,dt$$
  – Dies ist offensichtlich, da $u(t,x) \le |u(t,x)|$ sowie
  $$D_1u(t,y) \le \sqrt{(D_1u(t,y))^2 + (D_2u(t,y))^2} = \|\nabla u(t,y)\|$$
  für alle $t, y \in \mathbb{R}^2$ gilt.

- $$\int_{\mathbb{R}^2} u^4 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,y)| \, \|\nabla u(t,y)\| \, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,s)| \, \|\nabla u(x,s)\| \, ds \right) dx \, dy$$

  – Hier wurde schlicht $u^2 \cdot u^2$ durch oben gezeigte Gleichung (einmal für x, einmal für y) abgeschätzt.

- $$\begin{aligned} & 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(t,y)| \, \|\nabla u(t,y)\| \, dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,s)| \, \|\nabla u(x,s)\| \, ds \right) dx \, dy \\ = {} & 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u| \, \|\nabla u\| \right)^2 \end{aligned}$$

  – Es genügt

  $$\begin{aligned} & \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} |u(t,y)| \, \|\nabla u(t,y)\| \, dt \right) \left(\int_{-M}^{M} |u(x,s)| \, \|\nabla u(x,s)\| \, ds \right) dx \, dy \\ = {} & \left(\int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} |u(x,y)| \, \|\nabla u(x,y)\| \, dx \, dy \right)^2 \end{aligned}$$

  zu zeigen:

  $$\begin{aligned} & \int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} |u(t,y)| \, \|\nabla u(t,y)\| \, dt \right) \left(\int_{-M}^{M} |u(x,s)| \, \|\nabla u(x,s)\| \, ds \right) dx \, dy \\ = {} & \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} |u(t,y)| \, \|\nabla u(t,y)\| \, dt \right) \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} |u(x,s)| \, \|\nabla u(x,s)\| \, ds \right) dx \, dy \\ = {} & \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} |u(x,s)| \, \|\nabla u(x,s)\| \, ds \right) dx \cdot \int_{-M}^{M} \left(\int_{-M}^{M} |u(t,y)| \, \|\nabla u(t,y)\| \, dt \right) dy \\ = {} & \left(\int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} |u(x,y)| \, \|\nabla u(x,y)\| \, dx \, dy \right)^2, \end{aligned}$$

  wobei wir bei der letzten Gleichung Korollar 5.81 angewandt haben.

- $$4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u| \, \|\nabla u\| \right)^2 \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|\nabla u\|^2 \right).$$

  – Es genügt

  $$\begin{aligned} & \left(\int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} |u(x,y)| \, \|\nabla u(x,y)\| \, dx \, dy \right)^2 \\ \leq {} & \left(\int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} u^2(x,y) \, dx \, dy \right) \left(\int_{-M}^{M} \int_{-M}^{M} \|\nabla u(x,y)\|^2 \, dx \, dy \right) \end{aligned}$$

zu zeigen. Wir wenden zweimal die Höldersche Ungleichung an:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} |u(x,y)|\,\|\nabla u(x,y)\|\,dx\,dy\right)^2\\
&\leq \left(\int_{-M}^{M}\left(\int_{-M}^{M} |u(x,y)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-M}^{M} \|\nabla u(x,y)\|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}dy\right)^2\\
&\leq \left(\int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} u^2(x,y)\,dx\,dy\right)\left(\int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} \|\nabla u(x,y)\|^2\,dx\,dy\right).
\end{aligned}$$

Abgabe: Bis **Freitag, 26. Juni 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.