Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 11

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Bemerkung 6.36 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Definition. Seien E, F Banachräume, sei $\Omega \subset E$ offen und sei $f\colon \Omega \to F$. Dann heißt f in $x \in \Omega$ *Gâteaux-differenzierbar*, falls $A \in L(E,F)$ existiert, sodass für alle $h \in E$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x) - A\langle th\rangle) = 0$$

gilt. (Hierbei nimmt t Werte in $\mathbb{R}$ an.) Wir nennen A die *Gâteaux-Ableitung* von f in x und bezeichnen diese mit $f'_G(x)$. Ist f in jedem Punkt $x \in \Omega$ Gâteaux-differenzierbar, so heißt f *Gâteaux-differenzierbar* und die Abbildung $x \mapsto f'_G(x)$ heißt *Gâteaux-Ableitung* von f.
Die Funktion f heißt in $x \in \Omega$ *Fréchet-differenzierbar*, falls $B \in L(E,F)$ existiert, sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}(f(x+h) - f(x) - B\langle h\rangle) = 0$$

gilt. (Hierbei nimmt h Werte in E an.) Wir nennen B die *Fréchet-Ableitung* von f in x und bezeichnen diese mit $f'_F(x)$. Analog zu oben definieren wir *Fréchet-Differenzierbarkeit* und die *Fréchet-Ableitung*.
Die Funktion f heißt *stetig Gâteaux-differenzierbar* bzw. *stetig Fréchet-differenzierbar*, falls ihre Gâteaux- bzw. Fréchet-Ableitung stetig ist.

Aufgabe 11.1 (Gâteaux- und Fréchet-Ableitung) **[1 + 1 + 2 + 1* Punkte]**
Seien E, F Banachräume, sei $\Omega \subset E$ offen und sei $f\colon \Omega \to F$.

(i) Zeigen Sie, dass f genau dann Fréchet-differenzierbar ist, wenn es differenzierbar ist. Folgern Sie, dass in diesem Fall $f'_F = Df$ gilt.

(ii) Sei f Fréchet-differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Gâteaux-differenzierbar ist und $f'_G = f'_F$ erfüllt.

(iii) Sei f stetig Gâteaux-differenzierbar. Zeigen Sie, dass f auch stetig Fréchet-differenzierbar ist und $f'_F = f'_G$ erfüllt.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass f die Gleichung

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(x+th)\,dt = \int_0^1 f'_G(x+th)\langle h\rangle\,dt \\ &= f'_G(x)\langle h\rangle + \int_0^1 (f'_G(x+th)\langle h\rangle - f'_G(x)\langle h\rangle)\,dt \end{aligned}$$

erfüllt.)

(iv)* Erläutern Sie in Worten den Unterschied zwischen Gâteaux- und Fréchet-Differenzierbarkeit und finden Sie eine Funktion, die Gâteaux-, aber nicht Fréchet-differenzierbar ist.

Lösung:

Aufgabe 11.2 (Bilineare Abbildungen) **[2 + 2 + 0* + 2* Punkte]**

Seien E_1, E_2, F Banachräume und sei $A \in L(E_1, E_2; F)$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist stetig.

(ii) A ist in 0 stetig.

(iii) Die Operatornorm $\|A\|$ ist endlich.

(iv) Es gibt ein $c \geq 0$, sodass die Abschätzung

$$\|A\langle x, y\rangle\| \leq c\,\|x\|\,\|y\|$$

für alle $(x, y) \in E_1 \times E_2$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $(L(E_1, E_2; F), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

(c)* Sei $B\colon E_1 \times E_2 \to F$ eine lineare Abbildung, sei $(x, y) \in E_1 \times E_2$ und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Vergewissern Sie sich, dass

$$A\langle \lambda x, \lambda y\rangle = \lambda^2 A\langle x, y\rangle \quad \text{und}$$
$$B\langle(\lambda x, \lambda y)\rangle = \lambda B\langle(x, y)\rangle$$

gelten.

(d)* Zeigen Sie, dass

$$\psi\colon L(E_1; L(E_2, F)) \to L(E_1, E_2; F), \quad \alpha \mapsto ((x, y) \mapsto (\alpha(x))(y))$$

einen normerhaltenden Vektorraumisomorphismus definiert.

Lösung:

Aufgabe 11.3 (Distanz zum Einheitsquadrat) **[1 + 3 Punkte]**

Sei $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ das Einheitsquadrat. Wir betrachten die Distanzfunktion

$$\Delta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ a \mapsto \inf_{\xi \in Q} \|a - \xi\|\,.$$

(i) Zeichnen Sie die Niveaulinien von Δ, d. h. die Mengen

$$\mathcal{N}_\Delta(c) := \Delta^{-1}(\{c\}) \subset \mathbb{R}^2,$$

für $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$, $c = 1$ und $c = \frac{3}{2}$.

(ii) Sei $f = \Delta|_{(0,\infty)^2}$. Prüfen Sie f auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie die Ableitung von f in allen Punkten, in denen es differenzierbar ist.

Lösung:

Aufgabe 11.4 (Numerische Suche nach einem Minimum) **[1 + 1* + 3 + 4* Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion u heißt *koerziv*, falls $u(x) \to \infty$ für $\|x\| \to \infty$ gilt. Sei $(\lambda_k)_k$ eine Folge in $[0,1]$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Die Folge $(x_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ sei rekursiv durch

$$x_{k+1} := x_k - \lambda_{k+1} \nabla u(x_k)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir sagen, dass u die *Abstiegseigenschaft ab x_0 (mit Schrittfaktorfolge $(\lambda_k)_k$)* hat, falls es für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$u(x_{k+1}) \leq u(x_k) - \frac{\lambda_{k+1}}{3} \cdot \|\nabla u(x_k)\|^2$$

erfüllt.

(i) Sei $(\lambda_k)_k$ die konstante Folge mit $\lambda_k = \frac{1}{4}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine koerzive Funktion $s \in C^1(\mathbb{R}^2)$, die für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ die Abstiegseigenschaft ab x_0 hat.

(ii)* Sei $(\lambda_k)_k$ die konstante Folge mit $\lambda_k = \frac{1}{10}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine koerzive Funktion $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$, die für kein $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Abstiegseigenschaft ab x_0 hat.

(iii) Sei $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ koerziv und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass u die Abstiegseigenschaft ab x_0 mit konstanter Schrittfaktorfolge $(\lambda_k)_k$ mit $\lambda_k = \frac{1}{4}$ besitzt. Zeigen Sie, dass eine Teilfolge der Folge $(x_k)_k$ gegen einen kritischen Punkt von u konvergiert.

(Hinweis: Zeigen Sie dazu zunächst, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $k_0 \in \mathbb{N}$ ein $k \geq k_0$ mit $\|\nabla u(x_k)\| < \varepsilon$ gibt.)

(iv)* Sei $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ koerziv und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ wählen wir $m \in \mathbb{N}_{>0}$ minimal mit

$$v\left(x_k - \frac{\nabla v(x_k)}{m}\right) \leq v(x_k) - \frac{\|\nabla v(x_k)\|^2}{3m}$$

und setzen $\lambda_{k+1} = \frac{1}{m}$.

Zeigen Sie, dass die Folge $(\lambda_k)_k$ wohldefiniert ist und v die Abstiegseigenschaft ab x_0 hat. Folgern Sie, dass $(x_k)_k$ eine Teilfolge besitzt, die gegen einen kritischen Punkt von v konvergiert.

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 03. Juli 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.