O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 12

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Dieses Blatt ist das letzte reguläre Übungsblatt für dieses Semester. Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Beispiele 6.58 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 12.1 (Richtungsableitungen) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten in jede Richtung differenzierbar ist, und geben Sie jeweils alle Richtungsableitungen an.

(ii) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

Lösung:

Aufgabe 12.2 (Kurven in Niveaumengen) **[2 + 2 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\mathcal{N}_\Phi(0) = \Phi^{-1}(\{0\})$.

(i) Sei $\alpha\colon (-1,1) \to \mathcal{N}_\Phi(0)$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\dot\alpha(t)$ für alle $t \in (-1,1)$ senkrecht zu $\nabla\Phi(\alpha(t))$ steht.

(ii) Betrachte nun den Fall $n = 2$. Sei $u \in C^1(\mathbb{R})$ und seien $f, \Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, wobei Φ durch

$$\Phi(x,t) = u(x) - t$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Sei ferner $z_0 \in \mathcal{N}_\Phi(0)$ so, dass $f|_{\mathcal{N}_\Phi(0)}$ in z_0 sein globales Maximum annimmt.

Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\nabla f(z_0) = \lambda \nabla\Phi(z_0)$$

gilt.

(Hinweis: Wenden Sie Aufgabenteil (i) auf ein geeignetes α mit $\alpha(0) = z_0$ an. Beachten Sie, dass $\nabla\Phi(z_0) \neq 0$ ist.)

Lösung:

Aufgabe 12.3 (Nicht degenerierte und isolierte kritische Punkte) **[2 + 2 Punkte]**
Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Sei $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und sei $x_0 \in \Omega$, sodass $Du(x_0)$ eine injektive Abbildung ist. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das $u|_{B_\varepsilon(x_0)}$ injektiv ist.

(Hinweis: Sei $h(x) = u(x) - Du(x_0)\langle x - x_0\rangle$. Zeigen Sie zunächst mithilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $L > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $h|_{B_\delta(x_0)}$ lipschitzstetig mit Konstante L ist.)

(ii) Sei $g \in C^2(\Omega)$ und sei $x_0 \in \Omega$ ein kritischer Punkt von g. Wir sagen, dass x_0 *nicht degeneriert* ist, wenn die Hessematrix $(D_iD_jg(x_0))_{1\le i,j\le n}$ von g in x_0 invertierbar ist. Weiterhin sagen wir, dass x_0 *isoliert* ist, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass in $B_\varepsilon(x_0)$ keine weiteren kritischen Punkte von g liegen.

Zeigen Sie, dass jeder nicht degenerierte kritische Punkt von g isoliert ist.

(Hinweis: Wenden Sie Aufgabenteil (i) auf ∇g an.)

Lösung:

Aufgabe 12.4 (Charakterisierungen von Konvexität) **[4 + 3* Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in A$ und für alle $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

(a) Sei $g \in C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) g ist konvex.
- (ii) Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $g(y) \ge g(x) + Dg(x)\langle y - x\rangle$.
- (iii) Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $(Dg(y) - Dg(x))\langle y - x\rangle \ge 0$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\varphi(t) = (1-t)g(x) + tg(y) - g((1-t)x + ty)$.)

(b)* Sei $h \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass h genau dann konvex ist, wenn $D^2h(x)\langle\xi, \xi\rangle \ge 0$ für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(Zeigen Sie zunächst, dass die Gleichung

$$h(x + \xi) = h(x) + Dh(x)\langle\xi\rangle + \int_0^1 (1-t)D^2h(x + t\xi)\langle\xi, \xi\rangle\, dt$$

für alle $x \in \Omega$ und alle geeigneten $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt.)

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 10. Juli 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.