O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 12

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ
4	4	4	7	19

Allgemeiner Hinweis: Dieses Blatt ist das letzte reguläre Übungsblatt für dieses Semester. Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Beispiele 6.58 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 12.1 (Richtungsableitungen) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten in jede Richtung differenzierbar ist, und geben Sie jeweils alle Richtungsableitungen an.

(ii) Sei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g differenzierbar, aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

Lösung:

(i) Sei $e \in \mathbb{R}^2$.

Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^4)^2} \begin{pmatrix} y^3(x^2+y^4) - 2x^2y^3 \\ 3xy^2(x^2+y^4) - 4xy^6. \end{pmatrix}$$

Nach Bemerkung 6.42 erhalten wir $D_e f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left\langle \nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, e \right\rangle$.

Setze $(u,v)^t = e$. Betrachte

$$\varphi(t) = f(0 + te)$$

für $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_e f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^4uv^3}{t(t^2u^2 + t^4v^4)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{tuv^3}{(u^2 + t^2v^4)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Außerhalb vom Ursprung ist g als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar.

Im Ursprung: Sei $(u,v)^t \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
Dg\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\left\langle\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right\rangle &= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{g\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}}{\sqrt{s^2+t^2}}\\
&= \lim_{(s,t)\to(0,0)} \sqrt{s^2+t^2}\sin\left(\frac{1}{s^2+t^2}\right)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

da die Sinusfunktion beschränkt ist.

Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$
\nabla g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\\ 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\end{pmatrix}.
$$

Für $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ erhalten wir also

$$
h(t) := \nabla g\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix} = 2t\left(\sin\left(\frac{1}{2t^2}\right) - \frac{1}{2t^2}\cos\left(\frac{1}{2t^2}\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.
$$

Setze zudem $h(0) = 0$. Wäre g stetig partiell differenzierbar, so wäre h stetig. Für $t \downarrow 0$ hat h jedoch keinen Grenzwert.

Aufgabe 12.2 (Kurven in Niveaumengen) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Wir setzen $\mathcal{N}_\Phi(0) = \Phi^{-1}(\{0\})$.

(i) Sei $\alpha\colon (-1,1) \to \mathcal{N}_\Phi(0)$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\dot\alpha(t)$ für alle $t \in (-1,1)$ senkrecht zu $\nabla\Phi(\alpha(t))$ steht.

(ii) Betrachte nun den Fall $n = 2$. Sei $u \in C^1(\mathbb{R})$ und seien $f, \Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$, wobei Φ durch

$$
\Phi(x,t) = u(x) - t
$$

für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ gegeben ist. Sei ferner $z_0 \in \mathcal{N}_\Phi(0)$ so, dass $f|_{\mathcal{N}_\Phi(0)}$ in z_0 sein globales Maximum annimmt.

Zeigen Sie, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$
\nabla f(z_0) = \lambda\nabla\Phi(z_0)
$$

gilt.

(Hinweis: Wenden Sie Aufgabenteil (i) auf ein geeignetes α mit $\alpha(0) = z_0$ an. Beachten Sie, dass $\nabla\Phi(z_0) \neq 0$ ist.)

Lösung:

(i) Sei $t \in (-1,1)$. Setze

$$
h\colon (-1,1) \to \mathbb{R},\ t \mapsto \Phi(\alpha(t)).
$$

Wir bemerken, dass $h = 0$ ist, da α nach $\mathcal{N}_\Phi(0)$ abbildet. Wir wenden die Kettenregel an:

$$
0 = Dh(t) = D\Phi(\alpha(t)) \circ D\alpha(t).
$$

Wir erhalten also

$$0 = D\Phi(\alpha(t)) \langle D\alpha(t) \langle 1 \rangle \rangle = D\Phi(\alpha(t)) \langle 1 \cdot \dot{\alpha}(t) \rangle = \langle \dot{\alpha}(t), \nabla\Phi(\alpha(t)) \rangle .$$

Dies zeigt die Behauptung.

(ii) Bemerke zunächst, dass

$$\mathcal{N}_\Phi(0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \colon u(x) = t\} = \{(x, u(x)) \colon x \in \mathbb{R}\}.$$

Es gibt also ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $z_0 = (x_0, u(x_0))$. Wir setzen

$$\alpha\colon (-1,1) \to \mathcal{N}_\Phi(0),\ t \mapsto (x_0 + t, u(x_0 + t)).$$

Für dieses gilt $\alpha(0) = z_0$. Da α nach $\mathcal{N}_\Phi(0)$ abbildet, nimmt nach Voraussetzung die Funktion $f \circ \alpha$ in 0 ein lokales Maximum an. Wir erhalten wie in der Lösung von Aufgabenteil (i):

$$0 = D(f \circ \alpha)(0) \langle 1 \rangle = \langle \dot{\alpha}(0), \nabla f(\alpha(0)) \rangle = \big\langle (1, u'(x_0)), \nabla f(z_0) \big\rangle .$$

Es steht also $\nabla f(z_0)$ senkrecht zu $(1, u'(x_0))$. Nach Aufgabenteil (i) steht auch $\nabla\Phi(\alpha(0)) = \nabla\Phi(z_0)$ senkrecht zu $\dot{\alpha}(0) = (1, u'(x_0))$.

Da wir uns im $\mathbb{R}^2$ befinden, impliziert dies, dass $\nabla f(z_0)$ und $\nabla\Phi(z_0)$ parallel zueinander sind, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 12.3 (Nicht degenerierte und isolierte kritische Punkte) **[2 + 2 Punkte]**
Seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) Sei $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und sei $x_0 \in \Omega$, sodass $Du(x_0)$ eine injektive Abbildung ist. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, für das $u|_{B_\varepsilon(x_0)}$ injektiv ist.

(Hinweis: Sei $h(x) = u(x) - Du(x_0) \langle x - x_0 \rangle$. Zeigen Sie zunächst mithilfe des Mittelwertsatzes, dass für alle $L > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $h|_{B_\delta(x_0)}$ lipschitzstetig mit Konstante L ist.)

(ii) Sei $g \in C^2(\Omega)$ und sei $x_0 \in \Omega$ ein kritischer Punkt von g. Wir sagen, dass x_0 *nicht degeneriert* ist, wenn die Hessematrix $(D_i D_j g(x_0))_{1 \le i,j \le n}$ von g in x_0 invertierbar ist. Weiterhin sagen wir, dass x_0 *isoliert* ist, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass in $B_\varepsilon(x_0)$ keine weiteren kritischen Punkte von g liegen.

Zeigen Sie, dass jeder nicht degenerierte kritische Punkt von g isoliert ist.

(Hinweis: Wenden Sie Aufgabenteil (i) auf ∇g an.)

Lösung:

(i) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Sei $L > 0$. Wir haben für alle $x \in \Omega$

$$Dh(x) = Du(x) - Du(x_0).$$

Also ist h stetig differenzierbar und

$$Dh(x_0) = 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit von Dh gibt es eine $\delta > 0$, sodass

$$\|Dh(x)\| < L$$

für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt. Mit dem Mittelwertsatz folgt also für alle $a, b \in B_\delta(x_0)$

$$\|h(a) - h(b)\| \leq L \|a - b\|,$$

wie gewünscht.

Seien nun $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|u(a) - u(b)\| &= \|h(a) + Du(x_0)\langle a - x_0\rangle - h(b) - Du(x_0)\langle b - x_0\rangle\| \\ &= \|h(a) - h(b) + Du(x_0)\langle a - b\rangle\|.\end{aligned}$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|u(a) - u(b)\| \geq \|Du(x_0)\langle a - b\rangle\| - \|h(a) - h(b)\|.$$

Aufgrund der Injektivität von $Du(x_0)$ haben wir

$$\|a - b\| = \left\|((Du(x_0))^{-1} \circ Du(x_0))(a - b)\right\| \leq \left\|((Du(x_0))^{-1}\right\| \|Du(x_0)\langle a - b\rangle\|.$$

Setze

$$c = \frac{1}{\|((Du(x_0))^{-1}\|}.$$

Mit obiger Ungleichung erhalten wir

$$\|u(a) - u(b)\| \geq c\|a - b\| - \|h(a) - h(b)\|.$$

Wenden wir nun den Hinweis auf $L = \frac{c}{2}$ an, so erhalten wir ein δ, sodass für alle $a, b \in B_\delta(x_0)$ mit $a \neq b$ gilt:

$$\|u(a) - u(b)\| \geq c\|a - b\| - \|h(a) - h(b)\| \geq c\|a - b\| - \frac{c}{2}\|a - b\| = \frac{c}{2}\|a - b\| > 0.$$

Daraus folgt $u(a) \neq u(b)$, wie gewünscht.

(ii) Sei $u = \nabla g$. Da g zweimal stetig differenzierbar ist, ist u stetig differenzierbar. Die Jacobi-Matrix von ∇g (in x_0) ist nach Definition gerade die Hessematrix von g (in x_0). Da die Hessematrix von g in x_0 invertierbar ist, erhalten wir, dass die lineare Abbildung $Du(x_0)$ bijektiv ist.

Nach Aufgabenteil (i) gibt es also ein $\varepsilon > 0$, für das $\nabla g|_{B_\varepsilon(x_0)}$ injektiv ist. Insbesondere gilt daher für alle $y \in B_\varepsilon(x_0)$ mit $y \neq x_0$:

$$\nabla g(y) \neq \nabla g(x_0) = 0.$$

Daher enthält $B_\varepsilon(x_0)$ keinen weiteren kritischen Punkt von g, was zu zeigen war.

Aufgabe 12.4 (Charakterisierungen von Konvexität) **[4 + 3* Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in A$ und für alle $t \in [0, 1]$ die Ungleichung

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$$

erfüllt ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex.

(a) Sei $g \in C^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) g ist konvex.

(ii) Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $g(y) \geq g(x) + Dg(x) \langle y - x \rangle$.

(iii) Für alle $x, y \in \Omega$ gilt $(Dg(y) - Dg(x)) \langle y - x \rangle \geq 0$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\varphi(t) = (1-t)g(x) + tg(y) - g((1-t)x + ty)$.)

(b)* Sei $h \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass h genau dann konvex ist, wenn $D^2 h(x) \langle \xi, \xi \rangle \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(Zeigen Sie zunächst, dass die Gleichung

$$h(x + \xi) = h(x) + Dh(x) \langle \xi \rangle + \int_0^1 (1-t) D^2 h(x + t\xi) \langle \xi, \xi \rangle \, dt$$

für alle $x \in \Omega$ und alle geeigneten $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt.)

Lösung:

(a) Seien $x, y \in \Omega$. Bemerke zunächst, dass die Funktion φ aus dem Hinweis für alle $t \in [0,1]$ wohldefiniert ist, da Ω konvex ist. Bemerke weiterhin, dass für alle $t \in (0,1)$ gilt

$$\varphi'(t) = -g(x) + g(y) - Dg((1-t)x + ty) \langle -x + y \rangle .$$

Zudem ist φ' stetig, da g stetig differenzierbar ist. Bemerke zuletzt, dass die Konvexitätsbedingung (für x und y) äquivalent dazu ist, das $\varphi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,1]$ gilt.

(i) impliziert (ii): Seien $x, y \in \Omega$. Da g konvex ist, gilt $\varphi(t) \geq 0$ für alle $t \in [0,1]$. Bemerke zudem $\varphi(0) = 0$. Sei $t \in (0,1)$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_t \in (0,t)$ mit

$$0 \leq t^{-1}\varphi(t) = t^{-1}(\varphi(t) - \varphi(0)) = \varphi'(\xi_t).$$

Da φ' stetig ist erhalten wir

$$0 \leq \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \varphi'(\xi_t).$$

Daraus folgt $-g(x) + g(y) - Dg(x) \langle -x + y \rangle \geq 0$, wie gewünscht.

(ii) impliziert (iii): Seien $x, y \in \Omega$. Nach (ii) wissen wir

$$-Dg(x) \langle y - x \rangle \geq g(x) - g(y)$$

und

$$Dg(y) \langle y - x \rangle \geq g(y) - g(x).$$

Summieren der jeweiligen Seite liefert das gewünschte Ergebnis.

(iii) impliziert (i): Angenommen (iii) gilt, aber (i) gilt nicht. Dann gibt es $x, y \in \Omega$ mit $(Dg(y) - Dg(x)) \langle y - x \rangle \geq 0$, aber es gibt ein $t \in (0,1)$ mit $\varphi(t) < 0$. Da φ stetig ist, gibt es ein $t_0 \in [0,1]$, sodass φ in $t_0 \in (0,1)$ sein Minimum $\varphi(t_0) < 0$ annimmt. Sei nun $t \in (0, t_0)$. Dann gilt für $u = (1-t_0)x + t_0 y$ und $v = (1-t)x + ty$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \varphi'(t) - \varphi'(t_0) \\
&= (-g(x) + g(y) - Dg((1-t)x + ty) \langle -x + y \rangle) \\
&\quad - (-g(x) + g(y) - Dg((1-t_0)x + t_0 y) \langle -x + y \rangle) \\
&= -Dg(v) \langle y - x \rangle + Dg(u) \langle y - x \rangle \\
&= (Dg(u) - Dg(v)) \langle y - x \rangle \\
&= (Dg(u) - Dg(v)) \left\langle \frac{u - v}{t_0 - t} \right\rangle \\
&= \frac{1}{t_0 - t} (Dg(u) - Dg(v)) \langle u - v \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist φ auf $(0, t_0)$ monoton wachsend. Dies widerspricht jedoch

$$\varphi(t_0) < 0 = \varphi(0).$$

(b) Wir zeigen zunächst den Hinweis. Sei $x \in h$ und sei $\xi \in \mathbb{R}$ mit $x - \xi, x + 2\xi \in \Omega$. Wir wenden Lemma 4.100 auf die Funktion $f(s) = h(x + s\xi)$ mit $s \in (-1, 2)$ an. Wir erhalten

$$h(x + \xi) = f(1) = f(0) + f'(1) + \int_0^1 (1 - t) f''(t)\, dt.$$

Mit $f'(t) = Dh(x + t\xi)\langle \xi \rangle$ und $f''(t) = D^2 h(x + t\xi)\langle \xi, \xi \rangle$. Dies gibt uns die Gleichung.

Sei h nun konvex und sei $x \in \Omega$. Nach (ii) hat die Funktion

$$\ell \colon y \mapsto h(y) - h(x) + Dh(x)\langle y - x \rangle$$

in $y = x$ ein Minimum. Da $D\ell(y) = Dh(y) + Dh(x)$ und somit $D^2\ell(y) = D^2 h(y)$ folgt mit Theorem 6.70, dass $D^2 h(x)$ positiv semidefinit ist.

Sei nun $D^2 h(x)$ für alle $x \in \Omega$ positiv semidefinit. Dann gilt mit dem Hinweis

$$h(x + \xi) \geq h(x) + Dh(x)\langle \xi \rangle$$

für alle geeigneten ξ. Setze $\xi = y - x$ und erhalte so (ii).

Abgabe: Bis **Freitag, 10. Juli 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.