O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Zusatzübungsblatt

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Die Bearbeitung dieses Zusatzübungsblatts ist freiwillig. Sämtliche hier erreichten Punkte werden auf den Übungsschein der Analysis II angerechnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1 (Ableitung der Determinante) **[1 + 3 + 2 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

(Hinweis: Betrachten Sie $\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i\pi(i)}$*.)*

(ii) Es bezeichne I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\operatorname{tr}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ die Spurabbildung, welche jede Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ auf die Summe ihrer Diagonaleinträge abbildet.

Zeigen Sie, dass die Ableitung von det in $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$D\det(I_n)\langle A\rangle = \operatorname{tr}(A)$$

gegeben ist.

(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Richtungsableitung $D_J \det(I_n)$ *für eine Matrix* J*, die an genau einer Stelle den Eintrag* 1 *und an allen anderen Stellen den Eintrag* 0 *besitzt.)*

(iii) Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar.

Zeigen Sie, dass die Ableitung von det in X für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$D\det(X)\langle A\rangle = \det(X)\operatorname{tr}(X^{-1}A)$$

gegeben ist.

(Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine geeignete Richtungsableitung und verwenden Sie $X + tA = X(I_n + tX^{-1}A)$*.)*

Lösung:

Aufgabe 2 (Satz über die Umkehrabbildung) **[4 Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Sei ferner $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sodass für ein $c > 0$ die Ungleichung

$$\|g(x)\| \leq c\,\|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, in der die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto A(x) + g(x)$$

eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $Dg(0) = 0$ gilt.)

Lösung:

Aufgabe 3 (Satz von der impliziten Funktion) **[3 Punkte]**

Sei $a > 0$ und sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y)^2 - 2a^2(x^2 - y^2).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung Ω von $\sqrt{2}a$ und eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt, sodass $\varphi(\sqrt{2}a) = 0$ und

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

für alle $x \in \Omega$ gelten. Berechnen Sie zudem $\varphi'(\sqrt{2}a)$.

Lösung:

Aufgabe 4 (Lagrangesche Multiplikatorregel) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Sei $\mathbb{S}^3 = \{v \in \mathbb{R}^4\colon\ \|v\| = 1\}$. Finden Sie alle globalen Extrema der Abbildung

$$g\colon \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{R},\ (x, y, z, t) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Geben Sie jeweils an, ob es sich um globales Maximum oder ein globales Minimum handelt.

(b) Sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 = 2, x + z = 1\}.$$

Finden Sie alle lokalen Extrema der Abbildung

$$f\colon M \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x + y + z.$$

Lösung:

Abgabe: Bis **Freitag, 24. Juli 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.