O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Zusatzübungsblatt

Abgabe von: Musterstudent
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ
6	4	3	4	17

Allgemeiner Hinweis: Die Bearbeitung dieses Zusatzübungsblatts ist freiwillig. Sämtliche hier erreichten Punkte werden auf den Übungsschein der Analysis II angerechnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1 (Ableitung der Determinante) **[1 + 3 + 2 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
(Hinweis: Betrachten Sie $\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$*.)*

(ii) Es bezeichne I_n die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\operatorname{tr}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ die Spurabbildung, welche jede Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ auf die Summe ihrer Diagonaleinträge abbildet.
Zeigen Sie, dass die Ableitung von det in $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch
$$D\det(I_n)\langle A\rangle = \operatorname{tr}(A)$$
gegeben ist.
(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Richtungsableitung $D_J \det(I_n)$ *für eine Matrix* J*, die an genau einer Stelle den Eintrag* 1 *und an allen anderen Stellen den Eintrag* 0 *besitzt.)*

(iii) Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar.
Zeigen Sie, dass die Ableitung von det in X für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch
$$D\det(X)\langle A\rangle = \det(X)\operatorname{tr}(X^{-1}A)$$
gegeben ist.
(Hinweis: Betrachten Sie zunächst eine geeignete Richtungsableitung und verwenden Sie $X + tA = X(I_n + tX^{-1}A)$*.)*

Lösung:

(i) Wir identifizieren den $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$. Aus der Leibnizformel
$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$$
geht direkt hervor, dass die Determinantenfunktion ein polynomielle Funktion von $\mathbb{R}^{n^2}$ nach $\mathbb{R}$ und damit überall differenzierbar ist.

(ii) Sei J_{ij} die $(n \times n)$-Matrix, die in Zeile i und Spalte j eine 1 als Eintrag besitzt und überall sonst 0. Wir bemerken, dass für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $i, j \in \{1, \dots n\}$ mit $i \neq j$ gilt

$$\det(I_n + tJ_{ij}) = \det(I_n) = 1$$

und

$$\det(I_n + tJ_{ii}) = (1+t)\det(I_n) = (1+t).$$

Der Grund dafür ist, dass die Matrizen $I_n + J_{ij}$ bzw. $I_n + J_{ii}$ jeweils durch eine elementare Zeilenoperation aus der Matrix I_n überführt werden können.

Wir erhalten

$$D\det(I_n)\langle J_{ij}\rangle = D_{J_{ij}}\det(I_n) = \lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n + tJ_{ij}) - \det(I_n)}{t} = 0$$

sowie

$$D\det(I_n)\langle J_{ii}\rangle = D_{J_{ii}}\det(I_n) = \lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n + tJ_{ii}) - \det(I_n)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{t} = 1.$$

Schließlich erhalten wir für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$:

$$\begin{aligned} D\det(I_n)\langle A\rangle &= D\det(I_n)\left\langle \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}J_{ij}\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij} D\det(I_n)\langle J_{ij}\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ &= \operatorname{tr}(A). \end{aligned}$$

(iii) Mit Aufgabenteil (ii) erhalten wir für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|A\| = 1$:

$$\begin{aligned} D\det(X)\langle A\rangle &= D_A\det(X) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\det(X + tA) - \det(X)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\det(X)\det(I_n + tX^{-1}A) - \det(X)\det(I_n)}{t} \\ &= \det(X)\lim_{t\to 0}\frac{\det(I_n + tX^{-1}A) - \det(X)}{t} \\ &= \det(X) D_{X^{-1}A}\det(I_n) \\ &= \det(X) D\det(I_n)\left\langle X^{-1}A\right\rangle \\ &= \det(X)\operatorname{tr}(X^{-1}A). \end{aligned}$$

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt

$$D\det(X)\langle A\rangle = \|A\|\,D\det(X)\left\langle\frac{A}{\|A\|}\right\rangle = \|A\|\det(X)\operatorname{tr}\left(\frac{X^{-1}A}{\|A\|}\right) = \det(X)\operatorname{tr}(X^{-1}A),$$

da die Spurabbildung linear ist.

Aufgabe 2 (Satz über die Umkehrabbildung) **[4 Punkte]**
Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus. Sei ferner $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sodass für ein $c > 0$ die Ungleichung

$$\|g(x)\| \leq c\,\|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.
Zeigen Sie, dass es eine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ gibt, in der die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto A(x) + g(x)$$

eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $Dg(0) = 0$ gilt.)

Lösung: Wir zeigen zunächst den Hinweis: Sei $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\| = 1$. Aus $\|g(0)\| \leq c\,\|0\|^2 = 0$ folgt

$$\|Dg(0)\langle e\rangle\| = \|D_e g(0)\| = \left\|\lim_{t\to 0} \frac{g(te) - g(0)}{t}\right\| = \lim_{t\to 0}\left\|\frac{g(te)}{t}\right\| \leq \lim_{t\to 0}\left\|\frac{t^2}{t}\right\| = 0.$$

Da e ein beliebiger Einheitsvektor war, folgt schon $Dg(0) = 0$.
Wir zeigen nun, dass die Voraussetzungen für Theorem 7.5 erfüllt sind. Wir haben $E = F = \Omega = \mathbb{R}^n$, $k = 1$, $x_0 = 0$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Weiterhin gilt

$$Df(0) = DA(0) + Dg(0) = A \in L_{top}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

da A ein Isomorphismus ist.
Daher gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, sodass $V = f(U)$ offen ist und $f \in \mathrm{Diff}^1(U, V)$ gilt. Dies besagt insbesondere, dass $f|_U$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt.

Aufgabe 3 (Satz von der impliziten Funktion) **[3 Punkte]**
Sei $a > 0$ und sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y)^2 - 2a^2(x^2 - y^2).$$

Zeigen Sie, dass es eine Umgebung Ω von $\sqrt{2}a$ und eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega)$ gibt, sodass $\varphi(\sqrt{2}a) = 0$ und

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

für alle $x \in \Omega$ gelten. Berechnen Sie zudem $\varphi'(\sqrt{2}a)$.

Lösung: Wir zeigen, dass f die Voraussetzungen von Theorem 7.20 erfüllt. Wir haben $E_1 = E_2 = F = \Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $k = 1$ und $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, F)$. Wir setzen zudem $x_0 = \sqrt{2}a$ und $y_0 = 0$. Dann gilt

$$f(x_0, y_0) = f(\sqrt{2}a, 0) = 4a^4 - 4a^4 = 0.$$

Zudem haben wir für alle $z \in \mathbb{R}$:

$$D_2 f(x_0, y_0)\langle z\rangle = (2(x_0^2 + y_0) + 4a^2 y_0)z = 4a^2 z,$$

also $D_2 f(x_0, y_0) \in L_{top}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Daher gibt es eine offene Umgebung Ω von $\sqrt{2}a$ und eine Abbildung $C^1(\Omega)$ mit $\varphi(\sqrt{2}a) = 0$ und

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

für alle $x \in \Omega$.

Wir erhalten zudem

$$\begin{aligned}\varphi'(\sqrt{2}a) &= D\varphi(x_0)\langle 1\rangle \\ &= -(D_2 f(x_0,y_0))^{-1}\langle D_1 f(x_0,y_0)\langle 1\rangle\rangle \\ &= -\frac{(2(x_0^2+y_0)\cdot 2x_0 - 4a^2x_0)}{4a^2} \\ &= -\frac{8\sqrt{2}a^3 - 4\sqrt{2}a^3}{4a^2} \\ &= -\sqrt{2}a.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Lagrangesche Multiplikatorregel) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Sei $\mathbb{S}^3 = \{v \in \mathbb{R}^4 \colon \|v\| = 1\}$. Finden Sie alle globalen Extrema der Abbildung

$$g\colon \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{R},\ (x,y,z,t) \mapsto x^2+y^2+z^2-t^2.$$

Geben Sie jeweils an, ob es sich um globales Maximum oder ein globales Minimum handelt.

(b) Sei

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = 2, x+z = 1\}.$$

Finden Sie alle lokalen Extrema der Abbildung

$$f\colon M \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x+y+z.$$

Lösung:

(a) Sei $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x,y,z,t) \mapsto x^2+y^2+z^2+t^2-1$. Wir lösen in $\mathbb{S}^3$ die Gleichung

$$\nabla g(x,y,z,t) = \lambda \nabla \Phi(x,y,z,t)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$2(x,y,z,-t) = 2\lambda(x,y,z,t)$$

Nun ist $\lambda \neq 0$, da $0 \notin \mathbb{S}^3$. Es sind also nun nur noch $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ mögliche Lösungen.

Für $\lambda = 1$ folgt $t = 0$ und x,y,z sind beliebig. Für $x,y,z \in \mathbb{R}$ mit $x^2+y^2+z^2 = 1$ haben wir $g(x,y,z,0) = 1$. In diesen Punkten nimmt g sein globales Maximum 1 an.

Für $\lambda = -1$ erhalten wir $x = y = z = 0$ und $|t| = 1$. Damit nimmt g in den Punkten $(0,0,0,1)$ sowie $(0,0,0,-1)$ sein globales Minimum -1 an.

(b) Seien $\Phi_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x^2+y^2-2$ und $\Phi_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto x+z-1$. Wir lösen in M die Gleichung

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla_1 \Phi_1(x,y,z) + \lambda_2 \Phi_2(x,y,z)$$

für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$(1,1,1) = \lambda_1(2x,2y,0) + \lambda_2(1,0,1).$$

Wir erhalten $\lambda_2 = 1$, also $2\lambda_1 x = 0$ und $2\lambda_1 y = 1$. Damit ist $\lambda_1 \neq 0$ und somit $x = 0$. Wir erhalten $z - 1 = 0$, also $z = 1$ sowie $y^2 - 2 = 0$, also $y = \pm\sqrt{2}$.

Da f auf der kompakten Menge M sein Maximum und Minimum annimmt, liegen diese in den Punkten $(0,\sqrt{2},1)$ sowie $(0,-\sqrt{2},1)$. Ein einfacher Vergleich zeigt, dass f im ersten Punkt sein Maximum $\sqrt{2}+1$ und im zweiten Punkt sein Minimum $-\sqrt{2}+1$ annimmt.

Abgabe: Bis **Freitag, 24. Juli 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.