Plenumsübung zur Analysis II

Lothar Sebastian Krapp

Universität Konstanz

sebastian.krapp@uni-konstanz.de

15. April 2020

Halbstetigkeit

Definition (Unterhalbstetigkeit)

Seien X ein topologischer Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann ist f **unterhalbstetig** in $x_0 \in X$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 existiert, für die gilt:

$$\forall y \in U\colon f(y) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Wir nennen f unterhalbstetig, wenn es in jedem $x_0 \in X$ unterhalbstetig ist.

Halbstetigkeit

Lemma

Sei X ein topologischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}((a, \infty))$ offen in X ist. Dann ist f unterhalbstetig.

Beweis.

Sei $x_0 \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann ist nach Voraussetzung $U = f^{-1}((f(x_0) - \varepsilon, \infty))$ eine offene Umgebung von x_0.Weiterhin gilt für alle $y \in U$:

$$f(y) \in f(U) \subset (f(x_0) - \varepsilon, \infty),$$

also $f(y) > f(x_0) - \varepsilon$. $\square$

Matrizen

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ schreiben wir

$$A = (a^i_j)_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$$

oder, wenn n und m aus dem Zusammenhang klar sind, auch

$$A = (a^i_j).$$

Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Dann sind beispielsweise $a^2_1 = 4$ und $a^1_3 = 3$.

Transponierte

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Für eine Matrix $A = (a^i_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist ihre Transponierte wie folgt definiert:

$$A^t = (a^j_i)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n}.$$

Beispiel:
Sei wieder

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

Dann ist

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

Orthogonale Matrizen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthognal, falls $A^t A = I_n$ gilt.
Hierbei bezeichnet I_n die n-dimensionale Einheitsmatrix

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invertierbare Matrizen und Determinanten

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = I_n$ gibt. In diesem Fall nennen wir B die Inverse zu A und schreiben $B = A^{-1}$.

Theorem

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt.