Plenumsübung zur Analysis II

Lothar Sebastian Krapp

Universität Konstanz

sebastian.krapp@uni-konstanz.de

30. April 2020

Orthogonalität

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Es bezeichne $\langle ., . \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $\|.\|$ die euklidische Norm.

Definition (Orthogonalität)

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann steht x orthogonal (auch: senkrecht) zu y (in Zeichen: $x \perp y$), wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $A^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \perp a \text{ für alle } a \in A\}$ das orthogonale Komplement von A in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben kurz $x^\perp$ für $\{x\}^\perp$.

Beispiel: Die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$ stehen senkrecht zueinander, da $\langle x, y \rangle = -2 + 2 = 0$. Das orthogonale Komplement $x^\perp$ von x wird durch y aufgespannt.

Orthonormalbasen

Definition (Orthonormalität)

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt orthonormal, wenn jeder Vektor in A normiert ist (also $\|x\| = 1$ für alle $x \in A$) und alle Vektoren in A paarweise orthogonal zueinander sind.

Beispiel: Die Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist orthonormal.

Theorem (Gram–Schmidt)

Jede linear unabhängige orthonormale Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kann zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden.

Symmetrische Matrizen

Definition (Symmetrische Matrizen)

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch, falls $A^t = A$ ist.

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann im Standardskalarprodukt zwischen dem ersten und zweiten Argument „verschoben“ werden. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt nämlich:

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^t y = x^t A^t y = x^t A y = \langle x, Ay \rangle.$$

Bezüglich Orthogonalität wissen wir also beispielsweise, dass genau dann $Ax \perp y$, wenn $x \perp Ay$.

Endliche Vektorräume

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist V isomorph zu $\mathbb{R}^n$.

Beweis.

Jede Bijektion einer Basis von V zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ kann zu einem Isomorphismus zwischen V und $\mathbb{R}^n$ erweitert werden. □

Da Isomorphien die Vektorraumstruktur erhalten, können wir also alle n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume mit $\mathbb{R}^n$ identifizieren.

Normierte endliche Vektorräume

Aus Aufgabe 3 des Zusatzblatts zur Analysis I/II wissen wir, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Die Äquivalent zweier Normen bedeutet, dass die zugehörigen Topologien identisch sind.

Sind wir also an topologischen Eigenschaften endlichdimensionaler normierter $\mathbb{R}$-Vektorräume interessiert, können wir uns immer den $\mathbb{R}^n$ mit unserer Lieblingsnorm vorstellen.

Normtreue Vektorraumisomorphismen

Definition (Normtreue)

Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei $\psi\colon E \to F$ ein Vektorraumisomorphismus. Dann ist ψ normtreu, falls für alle $x \in E$ gilt: $\|\psi(x)\|_F = \|x\|_E$.

Normtreue Vektorraumisomorphismen

Beispiel: Sei $(F, \|.\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist

$$\psi\colon L(\mathbb{R}, F) \to F, A \mapsto A(1)$$

ein normtreuer Vektorraumisomorphismus.
In der Tat ist ψ ein Vektorraumisomorphismus, da

$$\dim(L(\mathbb{R}, F)) = \dim(\mathbb{R}) \cdot \dim(F) = \dim(F).$$

Für die Normtreue: Sei $A \in L(\mathbb{R}, F)$. Dann gilt

$$\|\psi(A)\|_F = \|A(1)\|_F = \left\|A\left(\frac{x}{x}\right)\right\|_F = \frac{\|A(x)\|_F}{|x|}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Insbesondere also

$$\|A\|_{L(\mathbb{R},F)} = \sup_{x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} \frac{\|A(x)\|_F}{|x|} = \|A(1)\|_F = \|\psi(A)\|_F .$$