Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 1

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1.1 (Nullstellen im algebraischen Abschluss) **[2 + 2 Punkte]**

Sei C ein algebraisch abgeschlossener Körper, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f \in C[x_1, \ldots, x_n] \setminus C$.

(i) Zeigen Sie, dass ein $x \in C^n$ mit $f(x) = 0$ existiert.

(ii) Sei nun $n \geq 2$. Zeigen oder widerlegen Sie: f hat unendlich viele Nullstellen in C^n.

Aufgabe 1.2 (Implizite Repräsentation) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**

Finden Sie für die folgenden affinen Varietäten $V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ jeweils eine implizite Repräsentation, also eine Darstellung der Form $V_i = \mathcal{V}(f_1, \ldots, f_n)$ mit $f_j \in \mathbb{R}[x, y]$ für alle $1 \leq j \leq n$.

(i) $V_1 = \{(t, t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

(ii) $V_2 = \{(t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

(iii) $V_3 = \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$,

(iv) $V_4 = \{(t^2, t^3 - t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.3 (Keine Varietäten) **[1 + 1 + 2 Punkte]**

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen keine affinen Varietäten sind.

(i) $H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(ii) $X = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$ in $\mathbb{R}^2$,

(iii) $\mathbb{Z}^n$ in $\mathbb{C}^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist.

Aufgabe 1.4 (Operationen auf Varietäten) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**

Sei k ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Unendliche Vereinigung von affinen Varietäten sind affine Varietäten.

(b) Unendliche Schnitte von affinen Varietäten sind affine Varietäten.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $U \subseteq V \subseteq k^n$ affine Varietäten. Dann ist auch $V \setminus U \subseteq k^n$ eine affine Varietät.

(d) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien $U \subseteq k^n$ und $V \subseteq k^m$ affine Varietäten. Dann ist auch

$$U \times V := \left\{ (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in k^{n+m} \;\middle|\; (x_1, \ldots, x_n) \in U, (y_1, \ldots, y_m) \in V \right\}$$

eine affine Varietät.

Abgabe: Donnerstag, 04. November 2021, 10:00 Uhr, Briefkasten 13 auf Ebene F4.