Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

**Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie**
**Blatt 2**

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Allgemeiner Hinweis:** Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

**Aufgabe 2.1** (Verallgemeinerung des Verschwindungsideals) **[2 + 2 Punkte]**

Das Konzept des Verschwindungsideals einer affinen Varietät kann für beliebige Teilmengen des affinen Raumes verallgemeinert werden:
Sei $n$ eine natürliche Zahl, sei $k$ ein Körper und sei $S \subseteq k^n$ eine beliebige Teilmenge. Wir definieren

$$\mathcal{I}(S) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid \forall (a_1, \ldots, a_n) \in S\colon f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}.$$

(i) Bestimmen Sie $\mathcal{I}(S)$ für $S := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 1\}$.

(ii) Bestimmen Sie für eine beliebige natürliche Zahl $n$ die Menge $\mathcal{I}(\mathbb{Z}^n)$ über $\mathbb{C}$.

**Aufgabe 2.2** (Radikale) **[1 + 2 + 1 Punkte]**

Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins und sei $I \lhd R$. Wir nennen $I$ ein **Radikalideal**, falls $I = \sqrt{I}$ gilt. (Vgl. Algebra I, Wintersemester 2020/2021, Aufgabe 2.1.)

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ ein Radikalideal ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende „Rechenregeln“, wobei $J$ ein weiteres Ideal von $R$ sei:

  (i) $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$

  (ii) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$

  (iii) Genau dann gilt $\sqrt{I} = R$, wenn $I = R$ ist.

Seien nun $k$ ein Körper, $R = k[x, y]$ und $I = \langle x^2, y^2 \rangle$.

(d) Zeigen Sie, dass $I$ nicht das Verschwindungsideal einer affinen Varietät aus $k^2$ ist.

**Aufgabe 2.3** (Potenzendifferenzen) **[4 Punkte]**

Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins, sei $I \lhd R$ und seien $f, g \in R$ mit $f - g \in I$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ bereits $f^m - g^m \in I$ gilt.

**Aufgabe 2.4** (Divisionsalgorithmus) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**

Betrachten Sie $I := \{f \in \mathbb{F}_2[x, y] \mid \forall (x, y) \in \mathbb{F}_2^2 \colon f(x, y) = 0\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $I$ ein Ideal mit $\langle x^2 - x, y^2 - y\rangle \subseteq I$ ist.

(ii) Beweisen Sie: Für alle $f \in \mathbb{F}_2[x, y]$ existieren $q_1, q_2 \in \mathbb{F}_2[x, y]$ und $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{F}_2$ mit

$$f(x, y) = q_1(x^2 - x) + q_2(y^2 - y) + \underbrace{r_1xy + r_2x + r_3y + r_4}_{=:r\in\mathbb{F}_2[x,y]}.$$

(*Hinweis*: Fassen Sie $f$ zunächst als Polynom in $\mathbb{F}_2[x][y]$ auf, d.h. schreiben Sie $f = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)y^i$. Teilen Sie nun jedes $p_i$ mittels Polynomdivision durch $(x^2 - x)$, um eine Darstellung der Form $f = q_1(x^2 - x) + a(y)x + b(y)$ zu erhalten. Verfahren Sie anschließend analog mit den Polynomen $a$ und $b$.)

(iii) Zeigen Sie, dass in der Notation von (ii) genau dann $r \in I$ gilt, wenn $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ erfüllt ist.

(iv) Folgern Sie $\langle x^2 - x, y^2 - y\rangle = I$.

**Abgabe:** Donnerstag, 11. November 2021, 10:00 Uhr, Briefkasten 13 auf Ebene F4.