Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 3

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1 (Divisionsalgorithmus) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

Seien $f = x^3 - x^2y - x^2z + x \in \mathbb{R}[x, y, z]$ sowie $f_1 = x^2y - z, f_2 = xy - 1 \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Verwenden Sie im Folgenden die monomiale Anordnung $>_{\text{grlex}}$.

(a) Berechnen Sie:

  (i) den Rest $r_1 \in \mathbb{R}[x, y, z]$ bei der Division von f durch (f_1, f_2),

  (ii) den Rest $r_2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$ bei der Division von f durch (f_2, f_1).

(b) Liegt $r := r_2 - r_1$ im Ideal $\langle f_1, f_2 \rangle$? Falls ja, finden Sie $A, B \in \mathbb{R}[x, y, z]$ mit $r = Af_1 + Bf_2$. Berechnen Sie außerdem den Rest von r bei Division durch (f_1, f_2).

(c) Finden Sie ein weiteres Polynom $g \in \langle f_1, f_2 \rangle$, welches bei Division durch (f_1, f_2) einen Rest ungleich Null besitzt.

Aufgabe 3.2 (Monomiale Anordnungen I) **[3 + 1 Punkte]**

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $v \cdot w := \sum_{i=1}^n v_i w_i$ das Skalarprodukt von v und w. Sei nun $u \in \mathbb{R}^n$ so, dass $u_1, \ldots, u_n$ positiv und linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ betrachten wir die Relation

$$\alpha >_u \beta :\Leftrightarrow u \cdot \alpha > u \cdot \beta.$$

(i) Zeigen Sie, dass $>_u$ eine monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ definiert. Für den Nachweis welcher Eigenschaft einer monomialen Anordnung benötigt man, dass die Komponenten u_i von u linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ sind?

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $v \in \mathbb{R}^m$, sodass $v_1, \ldots, v_m$ positiv und linear *abhängig* über $\mathbb{Q}$ sind und $>_v$ eine monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^m$ definiert.

Aufgabe 3.3 (Monomiale Anordnungen II) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{N}_0$ genau eine monomiale Anordnung gibt.

(b) Sei nun $n \geq 2$ beliebig. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils die Existenz einer monomialen Anordnung $>$ auf $\mathbb{N}_0^n$ mit den folgenden Eigenschaften:

  (i) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha < \beta$ existieren nur endlich viele Elemente $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha < \gamma < \beta$.

  (ii) Es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha < \beta$, sodass unendlich viele Elemente zwischen α und β liegen.

Aufgabe 3.4 (Multidegree) **[1 + 2 + 1 Punkte]**

Sei k ein Körper, sei $>$ eine monomiale Anordnung auf $k[x_1, \ldots, x_n]$ und seien $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f, g \neq 0$

(i) Zeigen Sie $\text{multideg}(f \cdot g) = \text{multideg}(f) + \text{multideg}(g)$.

(ii) Sei nun $f + g \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\text{multideg}(f+g) \leq \max\{\text{multideg}(f), \text{multideg}(g)\}$ gilt. Zeigen Sie außerdem, dass Gleichheit gilt, falls $\text{multideg}(f) \neq \text{multideg}(g)$.

(iii) Geben Sie ein Beispiel für f und g an, sodass

- $\text{multideg}(f) = \text{multideg}(g)$,
- $f + g \neq 0$,
- $\text{multideg}(f+g) \neq \max\{\text{multideg}(f), \text{multideg}(g)\}$.

gelten.

Abgabe: Bis Donnerstag, 18. November 2021, 10:00 Uhr, Briefkasten 13 auf Ebene F4.