Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 4

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 4.1 (Monomiale Anordnungen III) **[2 + 2 Punkte]**

Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

(a) Betrachte die Relation $>_{\text{mixed}}$ auf $\mathbb{N}_0^{n+m}$, die wie folgt für alle $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ und $\beta, \delta \in \mathbb{N}_0^m$ definiert ist:

$$(\alpha, \beta) <_{\text{mixed}} (\gamma, \delta) :\Leftrightarrow \alpha <_{\text{lex}} \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta <_{\text{grlex}} \delta).$$

Zeigen Sie, dass $>_{\text{mixed}}$ eine monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^{n+m}$ ist.

(b) Sei $>_\sigma$ eine fixierte monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ und sei $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Betrachte die Relation $>_{u,\sigma}$ auf $\mathbb{N}_0^n$, die wie folgt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiert ist:

$$\alpha <_{u,\sigma} \beta :\Leftrightarrow u \cdot \alpha < u \cdot \beta \vee (u \cdot \alpha = u \cdot \beta \wedge \alpha <_\sigma \beta).$$

(i) Zeigen Sie, dass $>_{u,\sigma}$ eine monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ ist.

(ii) Bestimmen Sie ein geeignetes $u \in \mathbb{N}_0^n$, sodass $>_{u,\text{lex}}$ gerade $>_{\text{grlex}}$ entspricht.

Aufgabe 4.2 (Dickson's Lemma) **[4 Punkte]**

Zeigen Sie, dass *Dickson's Lemma* zu folgender Aussage äquivalent ist: Für jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}_0^n$ existieren endlich viele Elemente $\alpha(1), \ldots, \alpha(s) \in A$ (mit $s \in \mathbb{N}$), sodass es für jedes $\alpha \in A$ ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ und ein $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\alpha = \alpha(i) + \gamma$ gibt.

Aufgabe 4.3 (Reste im Divisionsalgorithmus) **[1 + 1 + 2 Punkte]**

Seien n eine natürliche Zahl, k ein Körper, I ein Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ und $>$ eine fixierte monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$. Für eine geordnete Menge $G = (g_1, \dots, g_s) \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ (mit $s \in \mathbb{N}$) und ein $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ bezeichne $\overline{f}^G$ ein Restglied von f bei Division durch G.

(a) Sei G eine endliche Basis von I mit $\overline{f}^G = 0$ für jedes $f \in I$. Beweisen Sie, dass G eine Gröbner-Basis von I ist.

(b) Seien G und G' zwei Gröbner-Basen von I bezüglich $>$. Zeigen Sie, dass $\overline{f}^G = \overline{f}^{G'}$ für jedes $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ gilt.

(c) Sei G eine Gröbner-Basis von I. Beweisen Sie, dass für alle $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ die folgenden beiden Rechenregeln gelten:

   (i) $\overline{f+g}^G = \overline{f}^G + \overline{g}^G$

   (ii) $\overline{fg}^G = \overline{\overline{f}^G \overline{g}^G}$

Aufgabe 4.4 (Gröbner-Basen) **[2 + 2 Punkte]**

Seien n eine natürliche Zahl, k ein Körper, I ein Ideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ und $>$ eine fixierte monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$.

(a) Sei G eine endliche Teilmenge von I. Zeigen Sie, dass G genau dann eine Gröbner-Basis von I ist, wenn für jedes $f \in I$ ein $g \in G$ existiert, sodass der Leitterm von g den Leitterm von f teilt.

(b) Sei I nun ein Hauptideal von $k[x_1, \dots, x_n]$ mit Erzeuger $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ und sei J eine endliche Teilmenge von I, die f enhält. Beweisen Sie, dass J eine Gröbner-Basis von I ist.

Abgabe: Donnerstag, 25. November 2021, 10:00 Uhr, Briefkasten 13 auf Ebene F4.