Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 5

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n, m \in \mathbb{N}$, sei $>$ eine monomiale Anordnung auf $\mathbb{N}_0^n$ und sei k ein Körper.

Aufgabe 5.1 (Charakterisierung minimaler Gröbner-Basen) **[3 + 1 Punkte]**

Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $G \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ eine Gröbner-Basis für I bzgl. $>$ so, dass $\mathrm{LC}(g) = 1$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) G ist eine minimale Gröbner-Basis für I bzgl. $>$.

(ii) Für alle $H \subsetneq G$ ist H keine Gröbner-Basis für I bzgl. $>$.

(iii) $\mathrm{LT}(G)$ ist die *minimale Basis* für $\langle \mathrm{LT}(I) \rangle$ (siehe Proposition 7, Cox et al. Ch. II, §4).

Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{LT}(G) = \mathrm{LT}(\widetilde{G})$ und $|G| = |\widetilde{G}|$ für jede weitere minimale Gröbner-Basis $\widetilde{G}$ für I bzgl. $>$.

Aufgabe 5.2 (Buchberger's Algorithmus für lineare Polynome) **[4 Punkte]**

Seien $A = (a_{i,j})_{i,j} \in k^{n \times m} \setminus \{0\}$ eine Matrix, $R = (r_{i,j})_{i,j} \in k^{n \times m}$ die reduzierte Zeilenstufenform von A (vgl. Definition 6.2, Lineare Algebra II, SoSe 2020) und sei $t := \mathrm{Rang}(A)$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ setze

$$f_i := \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j \text{ und } g_i := \sum_{j=1}^{m} r_{i,j} x_j.$$

Setze ferner $I := \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_m]$ und $G := \{g_1, \ldots, g_t\} \subseteq k[x_1, \ldots, x_m]$.
Zeigen Sie, dass G die reduzierte Gröbner-Basis für I bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$ ist.

Aufgabe 5.3 (Buchbergers Algorithmus) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

Sei $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y]$ ein Ideal, wobei $f_1 = x^3y^2 - 1$, $f_2 = x^7 - y$ und $f_3 = x^4 - y^3$.

(i) Berechnen Sie mit Buchbergers Algorithmus eine Gröbner-Basis für I bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$.

(ii) Zeigen Sie, dass I unendlich viele minimale Gröbner-Basen bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$ besitzt.

(iii) Bestimmen Sie die reduzierte Gröbner-Basis für I bzgl. $>_{\mathrm{lex}}$.

Aufgabe 5.4 (Verallgemeinerter Eliminationssatz) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq n$. Eine monomiale Anordnung $>$ auf $\mathbb{N}_0^n$ ist vom ℓ–*Eliminationstyp*, falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt:

$$[(\exists i \in \{1, \ldots, l\} \colon \alpha_i \neq 0) \wedge (\forall i \in \{1, \ldots, l\} \colon \beta_i = 0)] \Rightarrow \alpha > \beta.$$

(i) Betrachte die Relation $>_\ell$ auf $\mathbb{N}_0^n$, die wie folgt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ definiert ist:

$$\alpha >_\ell \beta :\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i > \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \vee \left(\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \wedge \alpha >_{\mathrm{g\,rev\,lex}} \beta \right).$$

Zeigen Sie, dass $>_\ell$ eine monomiale Anordnung vom ℓ–Eliminationstyp ist.

(ii) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Eliminationssatzes:
Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ und sei $G \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ eine Gröbner-Basis für I bzgl. einer monomialen Anordnung vom ℓ–Eliminationstyp. Dann ist $G \cap k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$ eine Gröbner-Basis für $I_\ell := I \cap k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$.

Abgabe: Donnerstag, 02. Dezember 2021, 10:00 Uhr, Briefkasten 13 auf Ebene F4.