Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

**Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie**
**Blatt 6**

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**Allgemeiner Hinweis:** Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

**Aufgabe 6.1** (Resultante und gemeinsame Faktoren) **[1 + 3 Punkte]**

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die beiden Polynome $f = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7x + 6$ und $g = x^4 + x^2 + 1$ einen gemeinsamen Faktor in $\mathbb{Q}[x]$ haben.

(b) Sei $k$ ein Körper und seien $f, g \in k[x]$ zwei Polynome mit $\deg(f) > 0$ oder $\deg(g) > 0$. Beweisen Sie, die folgenden beiden Aussagen:

(i) $\operatorname{Res}(f, g, x) = (-1)^{\deg(f)\deg(g)}\operatorname{Res}(g, f, x)$.

(ii) $\operatorname{Res}(\lambda f, \mu g, x) = \lambda^{\deg(g)}\mu^{\deg(f)}\operatorname{Res}(g, f, x)$ für alle $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$.

Gelten die Aussagen (i) und (ii) auch im Fall $\deg(f) = \deg(g) = 0$?

**Aufgabe 6.2** (Eliminationssatz) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $I \trianglelefteq \mathbb{C}[x, y]$, sei $I_1 = I \cap \mathbb{C}[y]$ das erste Eliminationsideal und bezeichne $\pi_1 \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ die affine Projektion auf die $y$–Achse. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I_1) = \pi_1(\mathcal{V}(I))$ in den folgenden beiden Fällen gilt:

(i) $I_1 \neq \{0\}$.

*(Hinweis: Verwenden Sie den Fortsetzungssatz.)*

(ii) $I = \langle f, g\rangle$ für $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ mit $\operatorname{Res}(f, g, x) \neq 0$.

**Aufgabe 6.3** (Resultante und Polynomdivision) **[2 + 2 Punkte]**

Sei $k$ ein Körper, seien $f, g \in k[x]$ zwei Polynome mit $\deg(f) \geq \deg(g) > 0$ und setze $\ell = \deg(f)$, $m = \deg(g)$, sowie $c_0 = \mathrm{LC}(f), d_0 = \mathrm{LC}(g)$.

(i) Sei $\tilde{f} := f - \frac{c_0}{d_0} x^{\ell-m} g$ so, dass $\tilde{f} \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(\ell-\deg(\tilde{f}))} d_0^{\ell-\deg(\tilde{f})} \mathrm{Res}(\tilde{f}, g, x).$$

*(Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall* $\deg(\tilde{f}) = \ell - 1$*.)*

(ii) Seien $q, r \in k[x]$ so, dass $f = qg + r$ mit $\deg(r) < \deg(g)$ oder $r = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(\ell-\deg(r))} d_0^{\ell-\deg(r)} \mathrm{Res}(r, g, x),$$

wobei $\mathrm{Res}(0, g, x) := 0$.

*(Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $r \neq 0$ und $r = 0$ getrennt.)*

**Aufgabe 6.4** (Resultante und Minimalpolynom) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Seien $f, g \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ zwei Polynome und setze $g_y := g(y - x) \in \mathbb{C}[x, y]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{V}(\mathrm{Res}(f, g_y, x)) = \mathcal{V}(f) + \mathcal{V}(g).$$

(ii) Konstruieren Sie mit Hilfe von (i) das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ über $\mathbb{Q}$.

**Aufgabe 6.5*** (Sylvestermatrix) **[2 Punkte]**

Sei $k$ ein Körper, seien $\ell, m \in \mathbb{N}$ und setze $n = \ell + m$. Seien ferner $f, g \in k[x]$ mit

$$f = a_0 x^\ell + \ldots + a_\ell \text{ und } g = b_0 x^m + \ldots + b_m$$

und bezeichne $S = (s_{ij})_{ij} \in k^{n \times n}$ die Sylvestermatrix $\mathrm{Syl}(f, g, x)$. Geben Sie eine explizite Definition der Einträge $s_{ij}$ in Abhängigkeit von $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\}$ an.

*(Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidungen durch.)*

**Abgabe:** Donnerstag, 09. Dezember 2021, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.