Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 8

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 8.1 (Varietäten über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern) **[1 + 3 Punkte]**

Für ein Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ist $f^{\mathrm{h}} := x_0^{\deg(f)} f(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ein homogenes Polynom in $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, das die *Homogenisierung* von f genannt wird.

(a) Sei $f \in k[x_1]$. Zeigen Sie, dass f genau dann eine Nullstelle in k besitzt, wenn die Homogenisierung $f^{\mathrm{h}} \in k[x_0, x_1]$ eine Nullstelle in $k^2 \setminus \{0\}$ besitzt.

(b) Sei nun k nicht algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $f \in k[x_1, \ldots, x_m]$ so, dass $\mathcal{V}(f) = \{0\}$.
(Hinweis: Zeigen Sie die Aussage induktiv unter Verwendung von Teil (a).)

(ii) Für jede affine Varietät $V \subseteq k^n$ existiert ein $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ so, dass $V = \mathcal{V}(f)$.

Aufgabe 8.2 (Maximale Ideale) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Sei k algebraisch abgeschlossen und sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal.

(i) Zeigen Sie, dass I genau dann maximal ist, wenn ein Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ existiert so, dass $I = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$.
(Hinweis: Verwenden Sie Hilberts Nullstellensatz: schwache Version.)

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie: I ist genau dann maximal, wenn $\mathcal{V}(I)$ genau ein Element enthält.

(b) Sei k nicht algebraisch abgeschlossen und sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal.

(i) Zeigen Sie, dass für ein maximales Ideal I die affine Varietät $\mathcal{V}(I)$ entweder leer ist oder genau ein Element enthält.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für ein maximales Ideal I mit $\mathcal{V}(I) = \emptyset$ an.

Aufgabe 8.3 (Zariski-Topologie) **[2 + 1 + 1 Punkte]**

(a) Sei (X, τ) ein topologischer Raum und seien $S, T \subseteq X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $(S \subseteq T) \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$

(ii) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

(b) Zeigen Sie, dass die sogenannte *Zariski-Topologie* τ_{Z} auf k^n definiert durch $\tau_{\mathrm{Z}} := \{k^n \setminus \mathcal{V}(I) : I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]\}$ tatsächlich eine Topologie auf k^n definiert.

(c) Sei k unendlich und seien $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ zwei Polynome mit $g \neq 0$. Zeigen Sie, dass aus $f \in \mathcal{I}(k^n \setminus \mathcal{V}(g))$ bereits $f = 0$ folgt.

Aufgabe 8.4 (Irreduzible Varietäten) **[2 + 2 Punkte]**

(i) Zeigen Sie, dass die affine Varietät $\mathcal{V}(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{C}^2$ nicht irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die affine Varietät $\mathcal{V}(x^2 + y^2 - z^2) \subseteq \mathbb{C}^3$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8.5* (Nicht-leere Varietät) **[2 Punkte]**

Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal so, dass für jedes $f \in I$ ein $a \in k^n$ mit $f(a) = 0$ existiert. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$.

Abgabe: Donnerstag, 23. Dezember 2021, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.