Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Sarah-Tanja Hess, Patrick Michalski, Moritz Schick

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 9

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 9.1 (Radikale III) **[2 + 2 Punkte]**

(a) Sei $I \trianglelefteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ein echtes Ideal. Zeigen Sie, dass $\sqrt{I}$ dem Schnitt aller maximalen Ideale, die I enthalten, gleicht.

(b) Sei A ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass A genau dann ein Körper ist, wenn jedes Ideal $I \trianglelefteq A$ ein Radikalideal ist.

Aufgabe 9.2 (Zariski-Abschluss) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**

Bestimmen Sie den Zariski-Abschluss der folgenden Mengen bezüglich den angegebenen Obermengen:

(i) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(ii) $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \wedge x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

(iii) $C := \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : m = n^2\} \subseteq \mathbb{C}^2$

(iv) $D := \left\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (x \in \mathbb{N}) \wedge \left(y = \left(\sqrt{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^x\right) \wedge (x^2 + y^2 < 50^2)\right\} \subseteq \mathbb{C}^2$

Aufgabe 9.3 (Irreduzible Komponenten) **[4 Punkte]**

Sei $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, sei $s \in \mathbb{N}$ und seien $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ irreduzibel, paarweise nicht-assoziiert sowie $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{N}$ so, dass $f = \prod_{i=1}^s f_i^{\alpha_i}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(f) = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{V}(f_i)$ die Zerlegung der affinen Varietät $\mathcal{V}(f)$ in irreduzible Komponenten ist und $\mathcal{I}(\mathcal{V}(f)) = \langle \prod_{i=1}^s f_i \rangle$ ist.

Aufgabe 9.4 (Polynomiale Abbildungen) **[4 Punkte]**

Seien $V := \mathbb{R}, W := \mathcal{V}(y^2 - x^3 + x) \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $\varphi(t) = (a(t), b(t))$ eine polynomiale Abbildung von V nach W, wobei $a, b \in \mathbb{R}[t]$.

(i) Zeigen Sie, dass $b^2 = a(a^2 - 1)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $b^2 = uac^2$ für ein zu a teilerfremdes Polynom $c \in \mathbb{R}[t]$ und ein $u \in \mathbb{R}^\times$.

(iii) Folgern Sie, dass a und b konstante Polynome sind.

Abgabe: Donnerstag, 13. Januar 2022, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.