Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Dr. Michele Serra

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2021/2022

Übungen zur Vorlesung Algorithmische Algebraische Geometrie
Blatt 10

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 10.1 (Restglieder modulo Gröbnerbasen) **[2 + 2 Punkte]**

Sei K ein Körper und $I = \langle x - z^4, y - z^5 \rangle \lhd K[x, y, z]$.

(a) Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis G von I bezüglich der lex-Monomordnung und finden Sie eine Familie von Monomen, die den Raum der Restglieder modulo G aufspannt.

(b) Wiederholen Sie die vorherige Teilaufgabe mit grlex als Monomordnung. Vergleichen Sie die Familien von Monomen, die Sie erhalten.

Hinweis: Lesen Sie die Beispiele im Kapitel 5, §3 im Buch.

Aufgabe 10.2 (Leere Untervarietät) **[3 + 1 Punkte]**

(a) Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V eine nicht-leere K-Varietät und $\varphi \in K[V]$. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathcal{V}_V(\varphi) = \emptyset$, wenn $\varphi \in K[V]^*$.

(b) Gilt diese Aussage auch für beliebige unendliche Körper? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 10.3 (Hyperebene Darstellung) **[4 Punkte]**

Seien K ein Körper, $f \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ und $V \subseteq K^n$ die durch folgende Gleichung beschriebene Varietät.

$$x_n - f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

Zeigen Sie, dass V und K^{n-1} isomorphe K-Varietäten sind.

Aufgabe 10.4 (Nicht-isomorphe Varietäten) **[1+1+2 + 2* Punkte]**

Wir betrachten die Varietät $V = \mathcal{V}(y^5 - x^2) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) In dieser Teilaufgabe soll gezeigt werden, dass V und $\mathbb{R}$ als Varietäten nicht isomorph sind.

   (i) Zeigen Sie mit Hilfe von Gröbnerbasen-Algorithmen (Vgl. Kapitel 5, Abschnitt §3), dass jedes Element aus $\mathbb{R}[V]$ eine eindeutige Darstellung der Form $a(y) + b(y)x$ besitzt.

   (ii) Schreiben Sie $(a + bx)(a' + b'x) \in \mathbb{R}[V]$ in der Form aus (i)

(iii) Führen Sie die Annahme, dass ein Ringisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[V]$ existiert, zu einem Widerspruch.

Hinweis: Da φ surjektiv ist, liegen die Restklassen von x und y im Bild von φ.

(b)* Zeigen Sie, dass $y^5 - x^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x, y]$ ist, bestimmen Sie $\mathcal{I}(y^5 - x^2)$ und folgern Sie, dass der Koordinatenring $\mathbb{R}[V]$ integer ist.

Abgabe: Donnerstag, 20. Januar 2021, 10:00 Uhr, per E-Mail direkt an den Tutor.